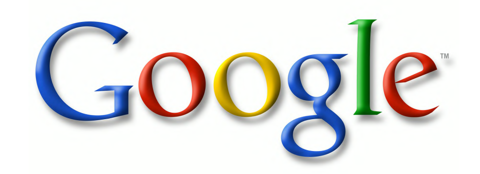








THÉORIE

DES

ANNUITÉS VIAGÈRES

ET DES

ASSURANCES SUR LA VIE,

SUIVIE D'UNE COLLECTION DE

TABLES RELATIVES A CES MATIÈRES;

PAR FRANCIS BAILY.

TRADUIT DE L'ANGLAIS

PAR

ALFRED DE COURCY,

ET PUBLIÉ

PAR LA COMPAGNIE D'ASSURANCES GÉNÉRALES SUR LA VIE.

TOME PREMIER.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Quai des Augustins, n° 55.

1836.


COMPAGNIE D'ASSURANCES GÉNÉRALES
PARIS
SUR LA VIE

PRÉFACE

DU TRADUCTEUR.

Les assurances sur la vie ont été établies en Angleterre et en France à un siècle d'intervalle. Il ne serait pas sans intérêt de rechercher les raisons qui ont concouru à retarder autant leur introduction en France. Indépendamment des causes générales qui ont rendu nos voisins plus avancés dans la plupart des branches de l'industrie, on rencontrerait bien des circonstances particulières qui devaient favoriser spécialement en Angleterre l'institution des assurances sur la vie. La nature des propriétés y contribuait puissamment; les substitutions étaient une source abondante de transactions de ce genre : souvent tout le sort d'une famille reposait sur la tête d'un de ses membres, et l'on conçoit qu'elle dût chercher avec empressement une garantie contre une éventualité désastreuse pour elle. La loi des successions, en consacrant le droit d'aînesse, doit aussi provoquer de nombreuses dispositions en faveur des

enfans exclus, par l'ordre de leur naissance, de l'héritage paternel : et nulle combinaison ne peut mieux que les assurances, réaliser ces vues bienveillantes, sans toutefois diminuer ni altérer en rien la fortune de celui qui doit être à son tour le chef de la famille. En outre, dans le caractère même de la nation, on trouve un principe de prévoyance, un soin du lendemain, que le Français, plus léger, montre à un bien moindre degré : aussi, dès que l'institution dont nous parlons parut en Angleterre, l'esprit public s'en empara aussitôt, et, au contraire, on peut dire que jusqu'à ce jour il lui est resté presque indifférent en France.

Enfin les événemens politiques qui s'opposaient dans tous les autres états à l'établissement des Assurances sur la vie, ne leur étaient pas un obstacle en Angleterre, grâce à sa position insulaire. Jadis, la Grande-Bretagne était une proie facile pour tous les envahisseurs, Romains, Saxons, Danois ou Normands; mais depuis que tant d'élémens divers ont constitué la nation anglaise, seule entre tous les états modernes, elle n'a pas vu son territoire violé et l'étranger dans ses villes. Tout en prenant une part active aux grandes luttes qui déchiraient l'Europe, elle conservait son sol intact et paisible; la mer était sa défense, et de-

puis l'Invincible Armada jusqu'à l'expédition de Boulogne, les ennemis de l'Angleterre ont vainement tenté de transporter chez elle le champ de bataille. Or, cette sécurité du territoire à laquelle cette contrée nous semble en grande partie redevable de son antériorité sur les autres nations par rapport à l'industrie, est surtout indispensable au succès des assurances sur la vie, qui ne peuvent se développer que dans un état paisible. On doit donc rendre aux personnes qui les ont introduites en France, la justice de reconnaître qu'elles ont saisi l'occasion favorable aussitôt qu'elle s'est présentée, puisque la première (1) société qui les a fait connaître date de 1819, quatre ans à peine après la pacification de l'Europe.

Néanmoins, comme nous le disions tout à l'heure, l'esprit public a accueilli avec indifférence cette heureuse importation de l'Angleterre, et les assurances sur la vie, négligées ou même ignorées,

---

(1) Nous ne parlons pas d'une société qui s'établit peu d'années avant la révolution française, sous la dénomination de *Compagnie Royale d'Assurances sur la vie*. Elle rencontra à son début la plus vive opposition. Condorcet, Laplace et Mirabeau s'élevèrent contre elle, et elle se vit bientôt forcée d'entrer en dissolution.

n'ont fait en France que de lents et pénibles progrès. Ces institutions intéressaient à la fois l'économie politique et la science; aussi voyons-nous en Angleterre le parlement leur donner des lois, les plus habiles mathématiciens leur tracer des règles sûres et relever leurs erreurs. Chez nous, au contraire, l'autorité et la science semblent n'avoir pas daigné s'en occuper. Abandonnées à elles-mêmes, peu connues ou mal appréciées, les assurances sur la vie ont long-temps langui dans une stagnation presque complète, sans que personne songeât à leur faire prendre le rang qui doit leur être assigné dans les institutions utiles d'une nation.

Cette indifférence est un exemple unique, qui forme un singulier contraste avec celui offert par les autres nations. Nous ne parlons pas de l'Angleterre et des États-Unis, où les *polices* d'assurances sur la vie, suivant l'expression technique, sont aujourd'hui aussi familières que peuvent l'être parmi nous un contrat de vente ou un bail à ferme; mais en Allemagne et en Prusse, où leur introduction est toute récente, la faveur publique les a aussitôt accueillies; et il est digne de remarque que malgré les obstacles que doit nécessairement rencontrer un établissement étranger, les compagnies françaises ont sous-

crit un bien plus grand nombre d'assurances dans leurs agences allemandes que dans leurs agences françaises.

C'est que la grave Allemagne a tout d'abord compris ce qu'il y a de garanties précieuses dans l'institution des assurances, et bien pénétrée de leur utilité, elle n'a pas reculé devant des sacrifices dont le fruit ne doit souvent être recueilli que dans un avenir lointain; sacrifices qui, d'ailleurs, ne profitent le plus souvent qu'aux héritiers ou légataires de celui qui les supporte, ce qui fait d'une assurance un acte de dévouement ou de bienfaisance. Le Français, moins prévoyant, plus pressé de jouir du fruit de ses sacrifices, et préférant souvent des offres brillantes et spécieuses à des promesses plus modérées et plus sûres, n'a pas encore apprécié les avantages des assurances sur la vie. Mais son insouciance, à cet égard, doit avoir un terme. Une institution bonne en elle-même et éprouvée par l'expérience éclairée des autres nations civilisées, doit triompher tôt ou tard des obstacles que l'ignorance et l'imprévoyance opposent à ses progrès, et rencontrer un jour, après quelques années de laborieuses épreuves, la faveur qui, dans les états voisins, a accueilli ses premiers débuts.

Ce jour pourrait être avancé par les encourage-

mens du gouvernement et ceux de la science. « Au-
» tant le jeu est immoral, dit l'illustre Laplace (1),
» autant ces établissemens sont avantageux aux
» mœurs, en favorisant les plus doux penchans
» de la nature. Le Gouvernement doit donc les
» encourager et les respecter dans les vicissitudes
» de la fortune publique; car les espérances qu'ils
» présentent portant sur un avenir éloigné, ils
» ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute in-
» quiétude sur leur durée. C'est un avantage que
» l'institution du gouvernement représentatif leur
» assure. »

Mais en attendant que d'autres, mieux placés que nous, puissent éveiller l'attention de l'autorité sur des opérations dignes de son patronage aussi bien que celles des caisses d'épargnes, nous avons pensé qu'il ne serait pas inutile de les faire connaître sous leur point de vue scientifique.

L'auteur du livre que nous traduisons s'étonnait qu'une science dont les applications sont si utiles et si multipliées, ne fût cultivée que depuis un peu plus d'un siècle en Angleterre. Quel eût donc été son étonnement en France, puisque cette science y est encore presque entièrement inconnue! Assurément, bien peu de personnes se dou-

(1) *Essai Philosophique sur les Probabilités*, page 194.

tent parmi nous que derrière le *prospectus* d'une compagnie d'assurances se cache toute une vaste théorie analytique qui repose sur les applications du calcul des probabilités aux lois de la mortalité, mais cette ignorance ne nous surprend pas puisque aucun auteur français ne s'est encore attaché à la combattre. Il est vrai que dès 1746, Deparcieux, dans un traité justement estimé, publia des recherches curieuses sur la durée de la vie humaine; il indiqua avec exactitude la manière dont doivent être dressées les tables de mortalité : lui-même en construisit plusieurs qui sont encore en usage, et qu'on trouvera à la fin du second volume de cet ouvrage. Mais en ce qui concerne les applications de ces recherches, il se renferma dans la spécialité des *Annuités Viagères* et les *Assurances sur la vie* ne sont même pas nommées dans son *Essai*. On peut en dire autant de MM. de Saint-Cyran et Deparcieux jeune, qui s'occupèrent de même exclusivement des annuités. D'autres auteurs beaucoup plus connus, Condorcet, Laplace et Lacroix, en traitant d'une manière générale le calcul des probabilités, ont exposé quelques-uns des élémens de la science qui nous occupe; mais pour eux cette matière était tout-à-fait accessoire, et ils se sont contentés d'en indiquer les principes gé-

néraux, sans en poursuivre les conséquences qui forment à elles seules une théorie distincte et complète.

M. Duvillard (1) est le premier, et jusqu'à ce jour, le seul auteur français qui paraisse avoir embrassé cette théorie dans son ensemble; il l'avait étudiée avec soin dans les écrivains anglais, et voulut même, à l'aide des documens qu'ils lui fournirent, organiser une société mutuelle sur le plan de l'*Equitable*. Mais la révolution française vint empêcher la réalisation de son projet avant même qu'il eût reçu un commencement d'exécution. Du reste, ses travaux, bien que les plus précieux qui aient été faits parmi nous sur ces matières, laissent encore beaucoup à désirer; comme ses devanciers, il ne développa mathématiquement que les questions relatives aux annuités, et n'exposa que sommairement et dans la forme d'une courte notice, les diverses combinaisons des assurances.

On voit donc que nous ne possédons aucun ouvrage complet sur la théorie des annuités viagères et des assurances sur la vie. En Angleterre,

---

(1) Auteur de plusieurs *Tables de mortalité*, des *Recherches sur les rentes*, Paris, 1787, etc.

au contraire, les savans les plus distingués ont traité ces matières, Halley, Simpson, Dodson, Price, de Moivre, et tant d'autres dont il serait trop long de faire l'énumération. Leurs travaux ont donné à cette science un haut degré d'exactitude et d'importance mathématique; mais ils sont inconnus en France et n'ont jamais été présentés dans notre langue. Nous espérons qu'on nous saura gré de les avoir, le premier, fait connaître. M. F. Baily, dans le traité dont nous avons entrepris la traduction, a recueilli et comparé tous les problèmes épars dans les écrits de ses prédécesseurs et dans les *Transactions Philosophiques*, et en y ajoutant le résultat de ses propres travaux il a pu composer un corps d'ouvrage complet et tout-à-fait spécial en même temps. Son traité est celui qui nous a semblé réunir ces deux qualités au plus haut degré : ainsi on n'y verra rien d'étranger au sujet principal, et en même temps on sera certain d'y trouver résolues toutes les questions importantes d'annuités viagères et d'assurances sur la vie. En un mot, jamais le titre d'un ouvrage ne nous a semblé mieux justifié.

Il nous reste à dire deux mots de notre travail en lui-même.

Nous avons traduit avec fidélité tout le texte

de l'ouvrage, mais nous avons cru devoir nous dispenser de reproduire un grand nombre de notes qui seraient dénuées pour nous de toute espèce d'intérêt. Dans ces notes, l'auteur cite les sources auxquelles il a puisé, ou combat les opinions de quelques autres écrivains sur les problèmes qu'il résout. Comme ces écrivains n'ont pas été traduits et ne le seront probablement jamais, comme, d'ailleurs, le sentiment de convenance et de justice qui devait porter l'auteur à ne point paraître s'approprier des résultats dus à ses prédécesseurs, n'existe plus pour nous, nous avons pensé que ces notes seraient superflues et même embarrassantes.

La monnaie anglaise étant différente de la nôtre, nous croyons devoir prévenir nos lecteurs de la règle que nous avous adoptée pour la traduction des *sommes* qui se rencontrent à chaque page dans un ouvrage de cette nature. Quand il ne s'agissait que d'un exemple à donner ou d'un rapport à faire connaître nous avons simplement substitué le *franc* à la *livre sterling*, sans changer le chiffre. Mais quand nous avons trouvé la désignation d'une somme précise, qui ne pouvait plus être considérée ni comme exemple, ni comme rapport, nous avons dû conserver la monnaie anglaise.

Nous ne terminerons pas sans témoigner ici notre reconnaissance à M. Levy, professeur à la Faculté des Sciences, dont les bienveillans conseils nous ont été grandement utiles pour l'achèvement de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES.

TOME PREMIER.

TOME SECOND.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE

DES

ANNUITÉS VIAGÈRES

ET DES

ASSURANCES SUR LA VIE.

CHAPITRE Ier.

LOIS DES CHANCES, ET PROBABILITÉS DE LA VIE HUMAINE.

1. Mon intention n'est pas d'expliquer en détail la nature et les lois des probabilités; mais pour rendre clairs les termes qui se rencontrent le plus fréquemment dans le cours de cet ouvrage, je vais exposer les principes généraux qui sont le plus intimement liés avec le sujet que je traite.

2. On doit entendre par la *probabilité* d'un événement le rapport du nombre de chances favorables à cet événement, au nombre total des chances possibles; et l'on peut l'exprimer par une fraction dont le numérateur est le nombre de chances favorables, et le dénominateur le nombre total de chances possibles. Ainsi, s'il y a a chances favorables et b chances

contraires à un événement, la probabilité de l'événement sera représentée par $\frac{a}{a + b}$.

3. De la même manière, la probabilité contraire à un événement peut être exprimée par une fraction dont le numérateur est le nombre de chances contraires à cet événement, et dont le dénominateur est, comme plus haut, le nombre total des chances possibles. Ainsi la probabilité contraire au même événement sera représentée par $\frac{b}{a + b}$.

4. Puisque la somme des deux fractions qui représentent les probabilités favorable et contraire à un événement, est égale à l'unité, il s'ensuit qu'une d'elles étant donnée, on trouvera l'autre par une soustraction. Ainsi la probabilité d'un événement étant $\frac{a}{a + b}$, la probabilité contraire sera représentée par $1 - \frac{a}{a + b} = \frac{b}{a + b}$, et réciproquement.

5. Si dans le cas où un certain événement aurait lieu, une personne a droit à une somme d'argent désignée, *l'attente* qu'elle a de recevoir cette somme a une valeur déterminée avant l'accomplissement de l'événement; et cette valeur s'obtient en multipliant la quotité de la somme attendue par la fraction qui représente la probabilité de la recevoir. Ainsi, si une personne a a chances d'obtenir, et b chances de ne pas obtenir une somme désignée, que j'ap-

pellerai s, dans ce cas $s \times \frac{a}{a+b}$ représentera la vraie valeur de l'*attente* qu'elle a de la recevoir, ou de son *espérance mathématique*.

6. La probabilité du concours de plusieurs événemens indépendants les uns des autres, est égale au produit des probabilités de chaque événement, considéré isolément. Ainsi, si la probabilité d'un événement est $\frac{a}{a+b}$, celle d'un second $\frac{c}{c+d}$, celle d'un troisième $\frac{e}{e+f}$..., alors $\frac{a}{a+b} \times \frac{c}{c+d} \times \frac{e}{e+f}$... représentera la probabilité du concours de tous ces événemens. Et cette expression, multipliée par la quotité de la somme, désignera l'espérance mathématique qu'on a de recevoir cette somme, dans le cas où tous ces événements, indépendans les uns des autres, auraient lieu.

7. Par un raisonnement semblable, on verra que la probabilité contraire à l'accomplissement d'un nombre quelconque d'événemens indépendans, est égale au produit des probabilités contraires à l'accomplissement de chacun d'eux, considéré isolément. Ainsi, si la probabilité contraire à un événement quelconque est $\frac{b}{a+b}$, celle contraire à un second $\frac{d}{c+d}$, à un troisième $\frac{f}{e+f}$..., alors $\frac{b}{a+b} \times \frac{d}{c+d} \times \frac{f}{e+f}$... représentera la probabilité contraire à tous ces événemens; et cette expression,

multipliée par la quotité de la somme, désignera l'espérance mathématique qu'on a de recevoir cette somme dans le cas où aucun de ces événemens n'aurait lieu.

8. De plus, si l'on retranche cette expression de l'unité, on aura la probabilité d'accomplissement de l'un quelconque de ces événemens; car, puisque $\frac{b}{a+b} \times \frac{d}{c+d} \times \frac{f}{e+f} \ldots$ est la probabilité du non accomplissement de tous les événemens proposés, il suit (n° 4) que $1 - \frac{b}{a+b} \times \frac{d}{c+d} \times \frac{f}{e+f} \ldots$ désignera la probabilité contraire au non accomplissement de *tous* ces événemens, c'est-à-dire favorable à l'accomplissement de l'un d'eux; et cette expression, multipliée par la quotité de la somme désignée, donnera l'espérance mathématique qu'on a de recevoir cette somme, dans le cas où l'un des événemens proposés aurait lieu.

9. De la même manière, si l'espérance qu'on a de recevoir une somme dépend de l'accomplissement d'un certain nombre d'événemens indépendans et du non accomplissement d'un certain nombre d'autres événemens indépendans, sa valeur sera égale à la quotité de la somme multipliée par la probabilité de l'accomplissement des premiers, et encore par la probabilité contraire à l'accomplissement des autres. Ces principes nous suffiront pour déterminer la valeur d'une espérance mathématique qui dépendrait de l'accomplissement ou du non accomplisse-

ment d'un nombre quelconque d'événemens indépendans.

10. Jusqu'ici j'ai toujours considéré ces événemens comme indépendans les uns des autres; mais si nous voulons déterminer la probabilité du concours de deux événemens dépendans l'un de l'autre, nous devrons multiplier la probabilité du premier par la probabilité qu'aura le second, si l'on considère le premier comme accompli; et la même règle s'étend à autant d'événemens qu'on voudra.

11. S'il y a plusieurs espérances de recevoir plusieurs sommes, il est évident que l'espérance mathématique de la totalité sera égale à la somme des espérances partielles. Mais s'il n'y a qu'une seule somme à recevoir dans le cas où les conditions proposées s'accompliraient, la valeur de l'espérance ne sera plus la même. Au reste, les méthodes à employer dans ces sortes de questions seront expliquées plus au long dans le cours de cet ouvrage; ce que nous avons dit jusqu'ici ne devant servir que d'introduction aux divers problèmes que nous résoudrons par la suite.

12. Maintenant, si nous avons à rechercher la probabilité qu'une personne d'un âge donné a d'atteindre ou de ne pas atteindre un certain âge donné, ou de recevoir une somme d'argent qu'on lui promet si elle atteint cet âge, c'est certainement une question de la plus grande incertitude, et à laquelle, pour

plusieurs individus du même âge, on devra répondre d'une manière toute différente. La chance qu'un homme de 30 ans, qui a une bonne constitution, des habitudes réglées et frugales, et qui habite la campagne, a de vivre encore 20 ans, est évidemment plus grande que celle d'un homme du même âge et de la même vigueur de constitution, mais plongé dans les plaisirs et les débauches d'une grande ville; plus grande encore que celle d'un homme du même âge et de la même force de tempérament, mais allant habiter un climat malsain auquel il n'est pas accoutumé; et, à plus forte raison encore, plus grande que celle d'un homme du même âge, mais d'une constitution faible et maladive, ou que ses occupations journalières exposeraient à beaucoup de dangers dont la généralité des hommes sont exempts, tels que les soldats et les marins en temps de guerre ou de service actif. Ces circonstances sont hors du domaine du calcul, et tout ce que les règles générales peuvent faire à ce sujet, c'est d'estimer le degré raisonnable de probabilité qu'une personne d'un âge donné a d'atteindre un autre âge donné, en supposant qu'elle n'ait ni plus ni moins de chances d'y parvenir que la majorité des individus du même âge. Cette chance moyenne est déterminée par des tables qui montrent le nombre de personnes qui, sur un certain nombre d'enfans, ordinairement mille au moins, que l'on prend au moment de leur naissance, sont, par une longue suite d'observations, trouvés vivans à chacune des années consécutives de la vie humaine, jusqu'à sa dernière limite; cette limite, dans quel-

ques tables, est portée à 86, et dans d'autres, à plus de 90 ans. Les exemples de la prolongation de la vie humaine jusqu'à 100 ans et au-delà sont si rares, qu'on n'a pas jugé utile d'en faire l'objet d'aucune observation spéciale.

13. Plusieurs observations sur la mortalité ont été faites par différentes personnes et dans différens lieux, et plusieurs écrivains tels que Dr Halley, Th. Simpson, Kersseboom, Deparcieux, Dr Price, Sulmich, Wargentin, Muret et autres ont calculé, d'après ces observations, des tables de la nature de celles dont nous venons de parler. Mais les mêmes tables de mortalité ne conviennent pas dans toutes les localités; l'expérience a montré que tous les pays ne sont pas également sains, et que le nombre de personnes qui meurent annuellement n'est pas le même, proportion gardée, en différens lieux. Dr Halley forma sa table d'après des observations faites sur les naissances et les décès de la ville de Breslaw en Silésie, pendant une série de 5 ans, de 1687 à 1692. Thomas Simpson, d'après des observations faites sur les registres mortuaires de Londres pendant 10 ans, de 1728 à 1738. Kersseboom, en dépouillant les registres de certaines annuités viagères constituées en Hollande, embrassa un espace de 125 ans. Deparcieux se servit des listes des tontines de France, et ses résultats furent confirmés par la comparaison des nécrologes ou registres mortuaires de quelques maisons religieuses des deux sexes. Dr Price fit usage d'un registre tenu à Northampton pendant 46 ans, depuis

1735 jusqu'à 1781; le même auteur a aussi dressé une table d'après un semblable registre tenu à Norwich pendant 30 ans, de 1740 à 1770; une autre d'après un registre tenu à Holy-Cross, près de Schrewbury pendant 30 ans, de 1751 à 1781; une autre d'après un registre tenu à Warrington, dans le comté de Lancastre, pendant 9 ans, de 1773 à 1782; une autre d'après un registre tenu par Dr Naygarth à Chester pendant 10 ans, de 1772 à 1782; une autre d'après un registre mortuaire tenu à Vienne pendant 8 ans; une autre d'après un semblable registre tenu à Berlin pendant 4 ans, de 1752 à 1756; une autre d'après un semblable registre tenu à Brandenburgh pendant 50 ans, de 1710 à 1760: ces trois dernières tables furent dressées au moyen de documents fournis par Sulmich; une autre encore d'après les tables de mortalité de Stockholm pendant 9 ans, de 1755 à 1764, et suivant les observations de Wargentin, et une autre enfin d'après sept différentes énumérations de toute la population du royaume de Suède, répétées de 3 ans en 3 ans, en 1757, 1760, 1763, 1766, 1769, 1772 et 1775. Muret se servit des registres tenus dans quarante-trois paroisses du canton de Vaud en Suisse pendant 10 ans, de 1756 à 1766.

14. Toutes ces tables présentent entre elles des contradictions, et souvent si frappantes que nous ne pouvons croire qu'on ait traité cette question avec tout le soin et l'exactitude dont elle est susceptible. On aurait dû observer qu'il y a deux natures d'élé-

ments pour former des tables de mortalité; les uns se tirent des registres des décès, qui montrent le nombre des personnes qui meurent à tous les âges sur une population quelconque; les autres, de la proportion qui existe entre le nombre des morts à tous les âges et celui des vivans aux mêmes âges. Les tables déduites des premiers de ces élémens ne sont correctes que lorsqu'il y a peu de fluctuations dans la population d'une contrée, et quand le nombre des naissances est égal à celui des décès; mais quand il y a plus d'individus qui quittent une localité que d'individus qui s'y établissent, et quand les naissances sont plus nombreuses que les décès (ainsi qu'il arrive presque toujours dans les communes rurales) les tables ainsi formées donneront une vie probable trop courte; et si le contraire a lieu, comme c'est l'ordinaire dans les grandes villes, une vie probable trop longue. Mais les tables formées d'après l'autre nature d'élémens ne sont sujettes à aucune erreur.

15. La plupart des tables que nous avons citées ont été construites d'après les premiers de ces élémens, et dans presque toutes, on a eu égard autant que possible aux variations produites par l'émigration, etc. Mais je ne crois pas qu'on se soit servi des autres élémens pour dresser aucune table d'observations, si ce n'est Wargentin qui fit des observations de cette nature sur la population de la Suède, et il est fort à regretter qu'on n'en ait pas fait de semblables dans les autres contrées.

16. Par une circonstance singulière, non-seule-

ment les individus du sexe féminin vivent plus long-temps que ceux du sexe masculin, mais encore les femmes mariées vivent plus long-temps que les femmes célibataires. Toutes les tables d'observations confirment cette particularité, dont Dr Aikin à Warrington et Dr Haygarth à Chester ont aussi reconnu l'exactitude. Tous deux tinrent des registres distincts pour constater la mortalité chez les hommes et chez les femmes. Des registres semblables furent aussi tenus à Stockholm, et dans le recensement de toute la population de la Suède, cette circonstance fut aussi l'objet d'une attention particulière ; ces dernières observations, qui paraissent mériter toute confiance, fournissent des élémens suffisans au calcul de tables distinctes d'annuités viagères pour chaque sexe, dans le célibat ou le mariage, et ces tables pourraient servir à déterminer la valeur des annuités ou assurances dépendant de l'existence ou du décès des veuves.

17. Les tables d'observations les plus usitées aujourd'hui en Angleterre sont celles que construisit Dr Price d'après les registres de décès de Northampton; mais elles tirent leur principale importance des nombreux tarifs d'annuités viagères sur une ou plusieurs têtes, qu'elles ont servi à calculer. Sous tout autre point de vue il doit paraître très incorrect de regarder comme applicable à tout un pays les observations faites dans une seule ville; on devrait constater la mortalité générale de tout le royaume, ainsi qu'on l'a fait en Suède, pour que les résultats convinssent à toutes les situations. Mais

jusqu'à ce que le Gouvernement juge convenable d'ordonner la recherche des élémens nécessaires, nous devons nous contenter des louables essais de quelques observateurs isolés, et profiter des lumières incomplètes qu'ils ont répandues sur ce sujet.

18. Quant aux diverses tables de mortalité que nous avons citées plus haut, je ne pense pas qu'aucune d'elles, à l'exception de celles de Kersseboom et de Deparcieux, puisse servir à calculer la valeur des annuités viagères. Car il est évident que toute personne malade ou qui sentira en elle-même le germe d'une maladie mortelle, ne voudra pas donner d'une annuité viagère le prix indiqué par les tables; je suis même porté à croire qu'elle n'en voudra acquérir à aucune condition. Ainsi l'on conçoit que les personnes qui se constitueront des rentes viagères seront toujours en bonne santé; elles ne composent donc qu'une partie de la population. Les élémens que Kersseboom et Deparcieux ont consultés pour la formation de leurs tables nous suffisent pour fixer d'une manière exacte les chances de la mortalité dans cette classe d'individus, et pour en déduire la valeur des annuités.

19. Des observations analogues peuvent s'appliquer à la détermination de la valeur des *assurances*; car on sait bien que l'assureur doit continuellement se tenir en garde contre les mauvaises santés, et les lois du pays punissent avec une juste sévérité toute fraude à ce sujet. Mais comme la cupidité ou la négligence peuvent amener à les violer, les per-

sonnes qui se feront assurer auront plus souvent de mauvaises santés que les personnes qui se constitueront des rentes viagères. Dans l'un et l'autre cas cependant, on peut souvent déterminer une valeur plus correcte, en ayant égard à l'état de santé, à la résidence et aux habitudes des contractans.

20. Mais les âges et les situations sont sujets à tant de combinaisons diverses, que nous devons opérer d'après des principes généraux, sans égard pour les cas particuliers. Il serait donc extrêmement à désirer qu'on eût dressé des tables générales sur la mortalité de tout le royaume. Construites de cette manière, elles nous mettraient à même de déterminer le degré de foi qu'on doit ajouter à celles actuellement en usage, et serviraient de base à d'autres plus détaillées et plus étendues.

21. Pour faciliter au lecteur l'intelligence de cet ouvrage, j'y ai joint un tableau comparatif de toutes les principales tables qui ont été construites sur la mortalité en diverses contrées : voyez table I à la fin du second volume de cet ouvrage. La première colonne montre les âges, et les autres colonnes le nombre de personnes qui subsistent à ces âges, sur 1000 enfans qui naissent dans les différens lieux désignés à la tête de chaque colonne; ces lieux sont disposés suivant le degré de mortalité de leurs habitans. Londres et les autres grandes villes sont donc placées les premières; puis les autres pays en suivant le plus exactement possible leur ordre de salubrité, et enfin les campagnes. Ce tableau servira donc à constater avec la dernière

évidence, l'énorme différence qui existe entre les grandes villes et la campagne, pour la durée de la vie humaine; car on verra que plus on s'éloigne des premières, plus est grande la probabilité de vivre, et plus on a de chances d'atteindre un âge avancé. Ainsi, sur 1000 individus qui naissent à Vienne, plus de la moitié meurent avant d'avoir 2 ans, tandis qu'à Norwich, le même nombre d'enfans vivent environ 8 ans; à Holy-Cross, plus de 27 ans; et dans le canton de Vaud, en Suisse, jusqu'à 41 ans. Ce tableau confirmera aussi la vérité de l'observation qui a déjà été faite sur la longévité des personnes qui se constituent des rentes viagères; car il paraît constant, d'après les recherches de Deparcieux, qu'à toutes les périodes de leur existence, cette longévité est beaucoup plus grande que dans un même nombre de personnes prises au hasard dans le climat le plus sain du monde; ainsi, les tables de Northampton n'indiquent qu'avec beaucoup d'inexactitude la mortalité des rentiers viagers.

22. Mais quelle que soit l'inexactitude de ces tables, elle ne saurait nuire aux développemens qui feront le sujet de cet ouvrage. Les principes que nous poserons et les règles que nous en déduirons seront toujours traités généralement, et sans égard à aucun cas particulier. Le lecteur en pourra donc faire l'application à chacune des tables que j'ai citées, ou à toute autre plus correcte, ou plus en harmonie avec les conditions du problème.

23. Soit donc une table quelconque d'observations,

indiquant le nombre des vivans à tous les âges de la vie. Soit a le nombre de vivans à l'âge d'une tête donnée A, et désignons par a', a'', a''', ... les nombres de vivans aux âges consécutifs. Soit aussi b, le nombre de vivans à l'âge d'une tête donnée B, et désignons par b', b'', b''', les nombres de vivans aux âges consécutifs. Soit encore c, le nombre de vivans à l'âge de C, et désignons par c', c'', c''', ... les nombres de vivans aux âges consécutifs. De la même manière désignons par α le nombre de vivans à la fin de n années à partir de l'âge de A, et par α', α'', α''', ... les nombres de vivans aux âges consécutifs; par β le nombre de vivans à la fin de n années à partir de l'âge de B, et par β', β'', β''', ... les nombres de vivans à chacun des âges consécutifs; enfin, par γ le nombre de vivans à la fin de n années à partir de l'âge de C, et par γ', γ'', γ''', ... les nombres de vivans à chacun des âges consécutifs; et ainsi de suite pour un nombre quelconque d'autres têtes. Alors, si l'on considère que sur a vivans, à l'âge de A, il n'en reste plus que a' à la fin d'une année, il sera évident que le nombre de chances qu'a la tête A de subsister un an de plus est a', et que le nombre total de chances qu'elle a d'atteindre ou de ne pas atteindre la fin de cette année, est a. Donc la probabilité qu'a la tête A de subsister à la fin de la première année, est représentée par $\frac{a'}{a}$. On trouvera de la même manière que la probabilité qu'elle a de subsister à la fin de la seconde année, est $\frac{a''}{a}$, à la fin de la troisième année $\frac{a'''}{a}$,

et ainsi de suite; car a'', a''', ... sont respectivement le nombre de chances que la tête A a de subsister 2, 3..... ans, et a est toujours le nombre total de chances qu'elle a de subsister ou de ne pas subsister à la fin de ces années. De la même manière, les probabilités qu'a la tête B de vivre 1, 2, 3 ans.... sont respectivement $\frac{b'}{b}$, $\frac{b''}{b}$, $\frac{b'''}{b}$, etc., et pour la tête C les mêmes probabilités sont $\frac{c'}{c}$, $\frac{c''}{c}$, $\frac{c'''}{c}$, etc. (*Voy.* n° 2.) Raisonnant encore de la même manière, on trouvera que les probabilités que la tête A a de subsister n, $n+1$, $n+2$, $n+3$..... années sont respectivement $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\alpha'}{a}$, $\frac{\alpha''}{a}$, $\frac{\alpha'''}{a}$, etc.; que les mêmes probabilités sont pour la tête B, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\beta'}{b}$, $\frac{\beta''}{b}$, $\frac{\beta'''}{b}$, et pour la tête C, $\frac{\gamma}{c}$, $\frac{\gamma'}{c}$, $\frac{\gamma''}{c}$, $\frac{\gamma'''}{c}$, etc.

24. De plus, les probabilités que deux têtes quelconques A et B ont de subsister simultanément pendant 1, 2, 3..... années, sont respectivement représentées par $\frac{a'b'}{ab}$, $\frac{a''b''}{ab}$, $\frac{a'''b'''}{ab}$, etc., et celles de trois têtes A, B, C par $\frac{a'b'c'}{abc}$, $\frac{a''b''c''}{abc}$, $\frac{a'''b'''c'''}{abc}$, etc. (n° 6.) Enfin, les probabilités que deux têtes quelconques A, B ont de subsister simultanément pendant n, $n+1$, $n+2$, $n+3$,.... années, sont $\frac{\alpha\beta}{ab}$, $\frac{\alpha'\beta'}{ab}$, $\frac{\alpha''\beta''}{ab}$, $\frac{\alpha'''\beta'''}{ab}$, etc., et celles de trois têtes A, B, C sont pour les mêmes espaces de temps $\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}$, $\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{abc}$, $\frac{\alpha''\beta''\gamma''}{abc}$, $\frac{\alpha'''\beta'''\gamma'''}{abc}$, etc.

25. D'après ces principes, il est clair (n° 4) que la probabilité que A a de *mourir* avant la fin de la première année sera représentée par $1 - \frac{a'}{a}$. Car puisque $\frac{a'}{a}$ désigne la probabilité que A a de vivre jusqu'à la fin de ce laps de temps, cette expression, retranchée de l'unité, donnera la probabilité contraire. De la même manière on trouvera que $1 - \frac{a''}{a}$, $1 - \frac{a'''}{a}$, etc. désigneront les probabilités que A a de mourir avant la fin des seconde, troisième..... années. De même encore les probabilités que B et C ont de mourir en 1, 2, 3.... ans seront représentées respectivement par $1 - \frac{b'}{b}$, $1 - \frac{b''}{b}$, $1 - \frac{b'''}{b}$, etc. et $1 - \frac{c'}{c}$, $1 - \frac{c''}{c}$, $1 - \frac{c'''}{c}$, etc. De plus, les probabilités que l'une des deux têtes AB, et l'une des trois têtes ABC ont de mourir en 1, 2, 3.... ans, seront représentées respectivement par $1 - \frac{a'b'}{ab}$, $1 - \frac{a''b''}{ab}$, $1 - \frac{a'''b'''}{ab}$, etc., et $1 - \frac{a'b'c'}{abc}$, $1 - \frac{a''b''c''}{abc}$, $1 - \frac{a'''b'''c'''}{abc}$, etc. Et en général, si nous retranchons de l'unité la probabilité que les têtes proposées ont de subsister simultanément jusqu'au terme fixé, le reste exprimera la probabilité qu'elles ont de ne pas subsister simultanément jusqu'à la fin de ce laps de temps, c'est-à-dire la probabilité que l'une d'elles a de mourir avant ce terme.

26. Mais (n° 6) la probabilité que toutes les têtes A, B, C,.... ont de s'éteindre en 1 an, sera

représentée par $\left(1-\frac{a'}{a}\right)\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'}{c}\right)\times$ etc.;

en deux ans, par $\left(1-\frac{a''}{a}\right)\times\left(1-\frac{b''}{b}\right)\times\left(1-\frac{c''}{c}\right)\times$ etc.;

en trois ans, par $\left(1-\frac{a'''}{a}\right)\times\left(1-\frac{b'''}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'''}{c}\right)\times$ etc.

Et les probabilités contraires à ces événemens, c'est-à-dire que l'une de ces têtes a de subsister à la fin des première, seconde, troisième,.... années, seront respectivement représentées par

$$1-\left(1-\frac{a'}{a}\right)\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'}{c}\right)\times \text{etc.},$$

$$1-\left(1-\frac{a''}{a}\right)\times\left(1-\frac{b''}{b}\right)\times\left(1-\frac{c''}{c}\right)\times \text{etc.},$$

$$1-\left(1-\frac{a'''}{a}\right)\times\left(1-\frac{b'''}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'''}{c}\right)\times \text{etc.}$$

27. Jusqu'ici, en cherchant la probabilité qu'une tête a de mourir dans un temps donné, j'ai toujours considéré cet événement comme devant avoir lieu à une époque quelconque avant le terme fixé. Mais si nous avions à déterminer la probabilité que cette tête a de mourir *dans le courant* d'une année particulière, l'expression changerait totalement. Ainsi la probabilité que A aura de mourir dans le courant de la seconde année, après avoir survécu à la première, est égale à $1-\frac{a''}{a'}=\frac{a'-a''}{a'}$; car $\frac{a''}{a'}$ désignera, *à la fin de la première année*, la probabilité que A aura de vivre à la fin de la seconde; et cette valeur, retranchée de l'unité, donnera la probabilité que A aura de mourir dans cette même seconde année. Mais puis-

que cet événement dépend aujourd'hui de la continuation de l'existence de A pendant l'année précédente $\left(\text{existence dont la probabilité est } \frac{a'}{a}\right)$; la valeur que nous avons trouvée plus haut devra être multipliée par cette fraction, afin de devenir la véritable valeur que nous cherchons. Donc la valeur *actuelle* de la probabilité que la tête A a de mourir *dans le courant* de la seconde année est représentée par $\frac{a'-a''}{a'} \times \frac{a'}{a} = \frac{a'-a''}{a}$. De la même manière, la probabilité qu'elle a de mourir dans le courant de la troisième année, est représentée par $\frac{a''-a'''}{a''} \times \frac{a''}{a} = \frac{a''-a'''}{a}$, et ainsi de suite, jusqu'aux $n^{ième}$, $(n+1)^{me}$, $(n+2)^{me}$, $(n+3)^{me}$,.... années, pour lesquelles les probabilités analogues seront respectivement $\frac{a_{\prime}-a}{a}$, $\frac{a-a'}{a}$, $\frac{a'-a''}{a}$, $\frac{a''-a'''}{a}$, etc., $a_{\prime}$ indiquant le nombre de vivans à la fin de $n-1$ années à partir de l'âge de A. Les mêmes observations s'appliquent à un nombre quelconque de têtes réunies; car en poursuivant le même raisonnement, on trouvera que la probabilité actuelle que l'une des trois têtes A, B, C a de s'éteindre dans le courant de la seconde année, sera exprimée par

$$\frac{a'b'c' - a''b''c''}{a'b'c'} \times \frac{a'b'c'}{abc} = \frac{a'b'c' - a''b''c''}{abc};$$

dans le courant de la troisième année, par

$$\frac{a''b''c'' - a'''b'''c'''}{a''b''c''} \times \frac{a''b''c''}{abc} = \frac{a''b''c'' - a'''b'''c'''}{abc}, \text{ etc.,}$$

et ainsi de suite jusqu'aux $n^{i\grave{e}me}$, $(n+1)^{me}$, $(n+2)^{me}$, $(n+3)^{me}$, etc. années, pour lesquelles les probabilités analogues seront respectivement $\frac{\alpha_{,}\beta_{,}\gamma_{,} - \alpha\beta\gamma}{abc}$, $\frac{\alpha\beta\gamma - \alpha'\beta'\gamma'}{abc}$, $\frac{\alpha'\beta'\gamma' - \alpha''\beta''\gamma''}{abc}$, $\frac{\alpha''\beta''\gamma'' - \alpha'''\beta'''\gamma'''}{abc}$, etc., $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, désignant le nombre de vivans à la fin de $n-1$ années à partir des âges de A, B, C, respectivement.

CHAPITRE II.

DES ANNUITÉS VIAGÈRES EN GÉNÉRAL.

28. Pour déterminer la valeur actuelle de toute annuité, il faut calculer la valeur actuelle de la rente de chaque année, et ajouter les unes aux autres ces valeurs partielles; on aura ainsi la valeur totale actuelle de l'annuité en question. Cette valeur dépendra toujours du taux de l'intérêt; et dans tout le cours de cet ouvrage j'ai représenté ce taux par ρ: conséquemment 1 franc, à la fin d'une année, vaudra $1+\rho$, et la valeur actuelle de 1 franc, payable après 1, 2, 3, etc. années, sera représentée par $(1+\rho)^{-1}$, $(1+\rho)^{-2}$, $(1+\rho)^{-3}$, ...

La somme des termes de cette série, continuée jusqu'au $n^{ième}$ terme inclusivement, ou

$$(1+\rho)^{-1}+(1+\rho)^{-2}+(1+\rho)^{-3}+\ldots(1+\rho)^{-n}=\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho},$$

représentera la valeur actuelle d'une annuité de 1 fr. pendant n années : si l'on continuait cette série jusqu'à l'infini, la somme de ses termes ou $\frac{1}{\rho}$ exprimerait la valeur actuelle de la perpétuité de la même annuité. J'ai expliqué en détail, dans mon traité sur la *Théorie de l'Intérêt et des Annuités*, les principes sur lesquels sont fondées ces observations; mais j'ai

cru nécessaire de les rappeler ici, afin de prévenir toute confusion dans la discussion des problèmes suivans.

29. Mais dans les annuités viagères, la rente de chaque année ne doit être touchée qu'à certaines conditions, et par conséquent les valeurs actuelles que nous venons de trouver doivent être diminuées en raison de la probabilité qu'on a de ne pas recevoir la rente. J'ai toujours supposé que cette rente fût de 1 fr. par an; le résultat indiquera donc combien cette annuité vaut de fois la rente d'une année, et il suffira de multiplier cette valeur par la quotité de toute autre rente viagère pour en avoir la valeur actuelle.

PROBLÈME I.

30. Trouver la valeur d'une annuité viagère payable à un *groupe* quelconque de têtes, c'est-à-dire aussi long-temps que ces têtes subsisteront ensemble.

SOLUTION.

Soient A, B, C, etc., les têtes sur lesquelles est constituée l'annuité, et désignons, comme au n° 23, les probabilités que chacune de ces têtes a de vivre 1, 2, 3.... années. Il suit là (n° 24), que la probabilité que toutes ces têtes ont de vivre simultanément à la fin de la première année est $\frac{a'b'c'\ldots}{abc\ldots}$, expression qui, multipliée par $(1+r)^{-1}$ ou la valeur actuelle de 1 franc payable dans un an, donnera

$\frac{a'b'c'\ldots\ldots}{(1+\rho)abc\ldots\ldots}$ pour la valeur actuelle de la rente de l première année, ou l'*espérance* qu'on a de recevoir cette somme, toutes les têtes proposées subsistant à la fin de la première année. De la même manière la probabilité que ce groupe de têtes a de subsister à la fin de la seconde année est $\frac{a''b''c''\ldots\ldots}{abc\ldots\ldots}$, expression qui, multipliée par $(1-\rho)^{-2}$, ou la valeur actuelle de 1 franc payable dans 2 ans, donnera $\frac{a''b''c''\ldots\ldots}{(1+\rho)^2 abc\ldots\ldots}$ pour la valeur actuelle de la rente de la seconde année. De même encore $\frac{a'''b'''c'''\ldots\ldots}{(1+\rho)^3 abc\ldots\ldots}$ donnera la valeur actuelle de la rente de la troisième année. Si nous opérons de la même manière pour toutes les années suivantes jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, la somme de tous ces termes ou $\frac{1}{abc\ldots} \times \left[\frac{a'b'c'\ldots}{(1+\rho)} + \frac{a''b''c''\ldots}{(1+\rho)^2} + \frac{a'''b'''c'''\ldots}{(1+\rho)^3} + \ldots + \frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{(1+\rho)^n}\right]$ sera la valeur totale actuelle de l'annuité, n désignant la différence d'âge entre la plus âgée des têtes proposées et la plus âgée de celles marquées dans la table d'observations.

Corollaire 1.

31. Maintenant, quand il ne s'agit que d'une seule tête A, cette série devient $\frac{1}{a}\left[\frac{a'}{(1+\rho)} + \frac{a''}{(1+\rho)^2} + \frac{a'''}{(1+\rho)^3} + \text{etc.}\right]$; quand il s'agit de deux têtes AB, elle devient $\frac{1}{ab}\left[\frac{a'b'}{(1+\rho)} + \frac{a''b''}{(1+\rho)^2} + \frac{a'''b'''}{(1+\rho)^3} + \text{etc.}\right]$. Donc si nous désignons par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... (en caractères pen-

chés) la valeur d'une annuité sur une tête isolée quelconque A, B, C,....; par *AB*, *AC*, *BC*,.... la valeur d'une annuité sur un groupe quelconque de deux têtes AB, AC, BC,.... et par *ABC*.... la valeur d'une annuité sur un groupe quelconque de trois têtes A B C, etc.; alors, dans le cas d'une seule tête, on aura

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a'}{(1+\varrho)}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]=A,$$
$$\frac{1}{b}\left[\frac{b'}{(1+\varrho)}+\frac{b''}{(1+\varrho)^2}+\frac{b'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]=B,$$
$$\frac{1}{c}\left[\frac{c'}{(1+\varrho)}+\frac{c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{c'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]=C,$$
etc. etc. etc. etc.

Dans le cas d'un groupe de deux têtes,

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{a'b'}{1+\varrho}+\frac{a''b''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]=AB,$$
$$\frac{1}{ac}\left[\frac{a'c'}{1+\varrho}+\frac{a''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]=AC,$$
$$\frac{1}{bc}\left[\frac{b'c'}{1+\varrho}+\frac{b''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{b'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]=BC,$$
etc. etc.

Et dans le cas d'un groupe de trois têtes,

$$\frac{1}{abc}\left[\frac{a'b'c'}{(1+\varrho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]=ABC,$$
etc. etc. etc.

Corollaire 2.

32. Il n'existe aucun moyen de simplifier ces termes, ou d'abréger l'expression générale donnée

plus haut pour la valeur d'une annuité sur une ou plusieurs têtes; tous les termes en doivent être traduits en chiffres et calculés les uns après les autres; cependant quand on a à trouver la valeur de plusieurs annuités sur une ou plusieurs têtes de divers âges consécutifs, on peut abréger considérablement l'opération en descendant de la valeur d'une annuité quelconque sur une ou plusieurs têtes, à la valeur d'une annuité analogue sur des têtes plus jeunes chacune d'un an. En effet, désignons par ABC la valeur d'une annuité sur un groupe quelconque de têtes ABC; et par $A_{,}B_{,}C_{,}$ la valeur d'une annuité sur un groupe d'un même nombre de têtes, plus jeunes chacune d'un an que les têtes A, B, C. Soient $a_{,}, b_{,}, c_{,}$, les nombres de vivans à leurs âges, d'après une table quelconque d'observations; alors par la même raison que

$$\frac{1}{abc}\left[\frac{a'b'c'}{(1+\rho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\rho)^2}+\frac{a'''b'''c'''}{(1+\rho)^3}+\text{etc.}\right]=ABC,$$

nous aurons

$$\frac{1}{a_{,}b_{,}c_{,}}\left[\frac{abc}{(1+\rho)}+\frac{a'b'c'}{(1+\rho)^2}+\frac{a''b''c''}{(1+\rho)^3}+\text{etc.}\right]=A_{,}B_{,}C_{,},$$

d'où multipliant la première équation par abc, et la seconde par $(1+\rho)a_{,}b_{,}c_{,}$, nous aurons

$$\frac{a'b'c'}{(1+\rho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\rho)^2}+\text{etc.}=ABC\times abc,$$

$$\frac{a'b'c'}{(1+\rho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\rho)^2}+\text{etc.}=A_{,}B_{,}C_{,}\times(1+\rho)a_{,}b_{,}c_{,}-abc;$$

d'où $A_{,}B_{,}C_{,}(1+\rho)a_{,}b_{,}c_{,}-abc=ABC\times abc.$

Conséquemment,

$$A_{,}B_{,}C_{,} = (1 + ABC) \times \frac{abc}{a_{,}b_{,}c_{,}} (1 + \rho)^{-1};$$

d'où la règle suivante pour trouver la valeur d'une annuité sur une seule tête, règle dont il sera facile de faire l'application à une annuité sur un groupe quelconque de têtes. Commencez par la tête la plus âgée marquée dans la table d'observations; ajoutez l'unité à la valeur d'une annuité sur cette tête (ordinairement o), et multipliez la somme par l'espérance qu'une tête plus jeune d'un an a de recevoir 1 franc après un an; le produit sera la valeur d'une annuité sur la tête plus jeune d'une année. Si l'on substitue cette valeur à celle de l'annuité sur la plus vieille tête, et qu'on répète l'opération, on aura la valeur d'une annuité sur la tête plus jeune encore d'une année, et ainsi de suite jusqu'à la tête de l'âge désigné. Il est vrai que cette manière de procéder est souvent plus longue et plus laborieuse que celle qui consiste à calculer la valeur numérique de tous les termes de la série donnée au corollaire précédent; néanmoins cette formule a cet avantage, que les différens degrés de l'opération donnent les valeurs des annuités pour tous les âges intermédiaires compris entre celui de la tête donnée et le plus avancé qui soit marqué dans la table d'observations, et l'on trouve ainsi presque aussi facilement la valeur des annuités pour tous ces âges intermédiaires que pour la tête proposée seulement.

33. *Exemple* 1. Soit proposé de trouver la valeur d'une annuité sur une tête de 90 ans ; en se servant de la table générale de Suède et de l'intérêt à 5 p. 100.

La valeur d'une annuité sur une tête de 96 ans est égale à 0.

Sur une tête de

95 ans,	$= (1+0,\quad)$	$\times$	$\frac{1}{2}$	$\times$	$0,9524$	$=$	$0,4762$
94	$= (1+0,4762)$	$\times$	$\frac{2}{5}$	$\times$	$0,9524$	$=$	$0,5624$
93	$= (1+0,5624)$	$\times$	$\frac{5}{11}$	$\times$	$0,9524$	$=$	$0,6764$
92	$= (1+0,6764)$	$\times$	$\frac{11}{12}$	$\times$	$0,9524$	$=$	$0,8363$
91	$= (1+0,8363)$	$\times$	$\frac{21}{33}$	$\times$	$0,9524$	$=$	$1,1129$
90	$= (1+1,1129)$	$\times$	$\frac{33}{47}$	$\times$	$0,9524$	$=$	$1,4129$

On voit donc que la valeur demandée est 1,4129.

34. *Exemple* 2. Quelle est la valeur d'une annuité sur un groupe de deux têtes, savoir, un homme de 90 ans et une femme de 84 ans, en se servant de l'intérêt à 4 p. 100, et de la table de Suède, qui indique une mortalité distincte pour chaque sexe.

En commençant par la tête la plus vieille qui soit dans les tables, et l'adjoignant à une plus jeune de 6 ans, on trouvera que la valeur d'une annuité sur un groupe de deux têtes, dont un homme de 95 ans une femme de 89, est 0.

Sur deux têtes de

$$94 \text{ et } 88 \text{ ans} = (1+0) \times \frac{1 \times 76}{4 \times 99} \times 0,9615 = 0,1845,$$

$$93 \text{ et } 87 = (1+0,1845) \times \frac{4 \times 99}{10 \times 129} \times 0,9615 = 0,3496,$$

$$92 \text{ et } 86 = (1+0,3496) \times \frac{10 \times 129}{17 \times 169} \times 0,9615 = 0,5827;$$

$$91 \text{ et } 85 = (1+0,5827) \times \frac{17 \times 169}{26 \times 224} \times 0,9615 = 0,7507,$$

$$90 \text{ et } 84 = (1+0,7507) \times \frac{26 \times 224}{38 \times 299} \times 0,9615 = 0,8629.$$

On voit donc que la valeur de l'annuité demandée est 0,8629.

35. Mais la meilleure manière dont on peut calculer la valeur des annuités, c'est d'employer les logarithmes; elle est suffisamment indiquée par l'inspection de la formule du n° **32**, et les principes que nous venons d'établir. Car puisque $A_{,}B_{,}C_{,} = (1+ABC) \times \frac{abc}{a_{,}b_{,}c_{,}} (1+\rho)^{-1}$, il est évident que $\log A_{,}B_{,}C_{,} = \log a + \log b + \log c + \log (1+\rho)^{-1} + \log (1+ABC) - (\log a_{,} + \log b_{,} + \log c_{,})$, et par là les calculs qui semblent si compliqués quand il s'agit d'un groupe de deux ou plusieurs têtes, se réduisent aux simples opérations d'addition et de soustraction.

36. En calculant de cette manière les valeurs des annuités, on fera bien d'observer les règles suivantes: Commencez par la plus âgée des têtes données C, et écrivez horizontalement sur un tableau divisé en

colonnes, comme celui que je joins ci-après pour modèle, les logarithmes des nombres de vivans après n, $(n - 1)$, $(n - 2)$.... années, à partir de la naissance, n désignant le nombre d'années compris entre la naissance et le dernier âge marqué sur la table d'observations. Maintenant, passant à la tête B, la plus âgée après C, écrivez de même sous les premiers les logarithmes des nombres de vivans après $(n-\Delta)$, $(n-\Delta-1)$, $(n-\Delta-2)$, etc. années, à partir de la naissance, Δ désignant la différence d'âge entre B et C. Opérez encore de même pour la plus vieille tête après B, et ainsi de suite, suivant le nombre de têtes sur lesquelles est constituée l'annuité. Ajoutez ensemble les quantités qui se trouvent en ligne verticale, et écrivez sous chaque somme le logarithme de $(1 + \rho)^{-1}$. Le reste de l'opération devient extrêmement facile, comme on le voit par le tableau ci-joint, où j'ai indiqué la méthode à suivre pour trouver les valeurs des annuités sur un groupe quelconque de deux têtes dont la différence d'âge serait de 10 ans, en se servant de l'intérêt à 4 p. 100 et de la table de Northampton.

37. En cherchant ces logarithmes dans les tables, on ne doit tenir compte que de la partie décimale; la même observation s'applique à l'addition et à la soustraction des logarithmes dans l'opération. L'omission de la caractéristique ne peut entraîner aucune erreur, puisque dans le dernier logarithme qui résulte de l'opération, et qui est celui de l'annuité cherchée, quand la caractéristique est positive, elle n'excède

jamais l'unité, et quand elle est négative il est également impossible de s'y méprendre.

Dans chaque colonne, les nombres compris dans les lignes D, E, F, G, H, I, K, L, indiquent les divers degrés de l'opération; la ligne L contient les logarithmes des valeurs demandées, et les nombres correspondans à ces logarithmes, ou ces valeurs mêmes se trouveront dans la ligne S. On verra dans la suite pour quelle raison j'ai séparé cette ligne des autres, quand je donnerai l'explication des lignes suivantes M, N, O, P, Q, R, que pour le moment on ne doit aucunement considérer.

Méthode ***à suivre pour obtenir facilement la valeur des annuités sur un groupe de deux têtes.***

(Différence d'âge, 10 ans. — Intérêt 4 p. 100. — Observations de Northampton.)

	INDICATION DES VALEURS DE CHAQUE LIGNE.	95 et 85.	94 et 84.	93 et 83.	92 et 82.	91 et 81.	90 et 80.
D	Logarithmes de 1, 4, 9, 16, 24, 34, etc.	0000000	6020600	9542425	2041200	3802112	5314789
E	Logarithmes de 145, 186, 234, 289, 346, 406, etc.	1613680	2695129	3692159	4608978	5390761	6085260
F	Somme des deux logarithmes ci-dessus.	1613680	8715729	3234584	6650178	9192873	1400049
G	Logarithme de $(1{,}04)^{-1}$ = logarithme de 0,961538.	9829667	9829667	9829667	9829667	9829667	9829667
H	Log^mes des nombres natur. de la ligne S, ajoutés à l'unité.	....	0745970	1471660	2080568	2705572	3177416
I	Somme des logarithmes de F, G, H.	1443347	9291366	4535911	8560413	1728112	4407132
K	Logarithmes de F dans la colonne suivante.	8715729	3234584	6650178	9192873	1400049	etc.
L	Différence entre les deux derniers logarithmes.	2727618	6056782	7885733	9367540	0328063	etc.
M	Logarithmes de $(1{,}04)^{-85}$, $(1{,}04)^{-84}$, $(1{,}04)^{-83}$, etc.	5521661	5691994	5862328	6032661	6202995	etc.
N	Somme des logarithmes de K et M.	4237390	8926578	2512506	5225534	7603044	etc.
O	Somme des logarithmes de L et N ou de I et M.	6965008	4983360	0398239	4593074	7931107	etc.
P	Nombres correspondans aux logarithmes de N.	26,53011	78,10121	178,3407	333,0837	575,8434	etc.
Q	Nombres correspondans aux logarithmes de O.	4,97165	31,50185	109,6032	287,9436	621,0271	etc.
R	Somme des nombres de P et Q.	31,50176	109,60306	287,9439	621,0273	1196,8705	etc.
S	Nombres correspondans aux logarithmes de L, ou valeur de l'annuité demandée.	0,18740	0,40335	0,61457	0,86448	1,07846	etc.

38. Ce tableau peut aussi servir à calculer les annuités sur une seule tête ; il suffira de biffer les logarithmes des lignes E et F. On peut encore s'en servir pour un groupe de trois têtes A, B, C, en ajoutant aux logarithmes des lignes D et E (pour obtenir la ligne F), les logarithmes des nombres de vivans après $n - \delta$, $n - \delta - 1$, $n - \delta - 2$, etc. années, à partir de la naissance, δ désignant la différence d'âge entre A et C. Il est évident que par cette méthode le calcul des valeurs des annuités sur un groupe de deux ou plusieurs têtes est presque aussi facile que celui des annuités sur une seule tête, et que le principal travail est de chercher les logarithmes des nombres de vivans aux différens âges et les nombres correspondans aux logarithmes des résultats.

39. On conçoit qu'une erreur dans l'un des nombres se perpétuera dans tous les nombres suivans ; or, comme ce n'est qu'avec une peine infinie que l'on parvient à la fin de l'opération à découvrir la source de l'erreur, il y aurait une grande utilité à pouvoir vérifier l'exactitude des nombres de chaque colonne à mesure que l'on opère. M. Morgan, dans sa *Théorie des Annuités*, etc., p. 58, a exposé une méthode à cet effet, et j'en ai extrait la règle suivante.

40. Écrivez dans la ligne horizontale M les logarithmes de $(1+\rho)^{-(n-\delta-1)}$, $(1+\rho)^{-(n-\delta-2)}$, $(1+\rho)^{-(n-\delta-3)}$ etc. ; δ désignant la différence d'âge entre la plus jeune et la plus âgée des têtes proposées. Ajoutez-les aux logarithmes de la ligne K, et écrivez la somme dans la ligne N ; ajoutez-les aussi aux logarithmes de la ligne I, et écrivez la somme

dans la ligne O. Cherchez ensuite les nombres correspondans aux logarithmes des lignes N et O, et placez-les respectivement dans les lignes P et Q. Alors si tout nombre naturel de la ligne Q, dans une colonne quelconque, est égal à la somme des nombres naturels des lignes P et Q dans la colonne précédente, toutes les valeurs obtenues jusque là sont exactes. Mais si les 5 ou 6 premières quantités de la ligne Q ne s'accordent pas avec les 5 ou 6 premières quantités de la ligne R dans la colonne précédente, c'est qu'il se sera glissé quelque erreur dans les nombres employés depuis la dernière preuve, et par conséquent il deviendra nécessaire de repasser l'opération depuis ce point-là.

41. Quoique les calculs nécessaires pour trouver de cette manière la valeur des annuités soient plus longs que l'emploi de la formule générale, on en est plus que dédommagé par la satisfaction qu'on éprouve en étant certain de l'exactitude des valeurs obtenues, et par le temps et le travail qu'on épargne en découvrant chaque erreur à mesure qu'elle se présente

42. Si j'ai exposé avec tant de détails la meilleur méthode à suivre pour trouver la valeur des annuité sur une ou plusieurs têtes, c'est qu'il nous manqu encore beaucoup de tables sur cette matière pou compléter celles que nous avons déjà; et surtout nous en faudrait de nouvelles, dont les unes seraier le résultat d'observations spéciales faites sur la mor talité des rentiers viagers, et les autres résulteraier d'observations générales faites dans tout le royaume

Des tables ainsi construites seraient extrêmement utiles, mais on aurait tant de peine à les calculer même avec les logarithmes, qu'il est bien peu d'individus qui fussent disposés à entreprendre une tâche aussi laborieuse, même s'ils possédaient les élémens nécessaires. Malheureusement aussi, les sociétés dont l'objet semble être plus particulièrement d'encourager une entreprise de ce genre, ne se trouvent pas assez intéressées à publier des documens plus positifs à ce sujet.

43. J'ai réuni à la fin de cet ouvrage toutes les tables publiées jusqu'à ce jour sur la valeur des annuités sur une ou plusieurs têtes, et le calculateur y pourra choisir celle qui conviendra le mieux au problème qu'il aura à résoudre. J'indiquerai plus au long, dans le chapitre XII, la manière dont on doit faire usage de ces tables, et les applications qu'elles présentent.

Corollaire 3.

44. Au moyen de la formule générale du problème, qui donne la valeur d'une annuité sur un groupe quelconque de têtes, nous pourrons déterminer celle d'une annuité *différée*, c'est-à-dire d'une annuité qui ne doit courir qu'après un nombre d'années déterminé n, pourvu qu'alors les têtes données subsistent, et qui doit courir depuis cette époque jusqu'à la dissolution de ce groupe de têtes. Soient en effet A, B, C, etc., les têtes données, et soient $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$, $\beta, \beta', \beta'' \ldots$, $\gamma, \gamma', \gamma'' \ldots$, etc., les nombres de vivans à la fin de

n, $n+1$, $n+2$, etc. années à partir des âges de A, B, C, etc. suivant l'explication du n° 23; alors la valeur d'une annuité sur le groupe ABC....., sera représentée par la série suivante :

$$\frac{1}{abc\ldots\ldots}\times\Big[\frac{a'b'c'\ldots\ldots}{1+\varrho}+\frac{a''b''c''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''c'''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^3}$$
$$+\ldots+\frac{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots}{(1+\varrho)^{n+1}}+\frac{\alpha''\beta''\gamma''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^{n+2}}+\frac{\alpha'''\beta'''\gamma'''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^{n+3}}+\text{etc.}\Big]$$

dont la première partie doit être continuée jusqu'à n termes, et la dernière (ou la portion d'annuité qui est différée de n années), doit être poursuivie jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. Par conséquent cette dernière partie, ou la série

$$\frac{1}{abc\ldots}\times\Big[\frac{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots}{(1+\varrho)^{n+1}}+\frac{\alpha''\beta''\gamma''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^{n+2}}+\frac{\alpha'''\beta'''\gamma'''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^{n+3}}+\text{etc.}\Big]$$

exprimera la valeur d'une annuité dont on ne doit entrer en jouissance qu'après n années; je la désignerai par $(ABC\ldots\ldots)^{n}$. Or, si nous avons des tables qui indiquent la valeur des annuités sur une ou plusieurs têtes, à tous les âges, nous pourrons aisément sans calculer séparément chaque terme de cette série, en déduire la valeur de celle d'une annuité sur un même nombre de têtes plus âgées chacune de n années que les têtes proposées. Car si l'on représente cette dernière valeur par $A^\circ B^\circ C^\circ\ldots\ldots$ nous aurons d'après la formule du problème :

$$A^\circ B^\circ C^\circ\ldots\ldots=\frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots\ldots}\times\Big[\frac{\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots}{(1+\varrho)}+\frac{\alpha''\beta''\gamma''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^2}$$
$$+\frac{\alpha'''\beta'''\gamma'''\ldots\ldots}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\Big]:$$

Et en multipliant les 2 termes de cette équation par

$\frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{abc\ldots}(1+\rho)^{-n}$,

nous aurons

$$A^0 B^0 C^0 \ldots \times \frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{abc\ldots}(1+\rho)^{-n} = (ABC\ldots)^n.$$

D'où la règle générale suivante :

45. Cherchez la valeur d'une annuité sur un groupe d'un même nombre de têtes, plus âgées que les têtes proposées chacune du nombre d'années dont est différée l'annuité. Cherchez aussi l'espérance que le groupe proposé a de recevoir 1 fr. à la fin de ce délai; le produit de ces deux quantités sera la valeur demandée.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, la question VI du chapitre XII.

Corollaire 4.

46. Au moyen de la série du dernier corollaire, nous pouvons déterminer la valeur d'une annuité viagère *temporaire*, c'est-à-dire d'une annuité dont on doit entrer en jouissance immédiatement, mais qui doit s'éteindre après un nombre d'années déterminé n, moindre que la durée possible de l'existence de la tête ou des têtes données. Car tout restant comme dans le dernier corollaire, il est évident que les n premiers termes de la série que nous y avons développée, ou

$$\frac{1}{abc\ldots} \times \left[\frac{a'b'c'\ldots}{(1+\rho)} + \frac{a''b''c''\ldots}{(1+\rho)^2} + \frac{a'''b'''c'''\ldots}{(1+\rho)^3}\right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{(1+\rho)^n}\right]$$ seront la valeur de l'annuité tem-

soit nul, ou que l'argent ne porte aucun intérêt, alors cette formule se réduira à la série

$$\frac{1}{a}(a' + a'' + a''' + \ldots);$$

d'où la règle suivante, pour trouver la valeur d'une annuité sur la tête A considérée comme touchant annuellement cette rente, et sans intérêt d'argent. Divisez la somme de tous les vivans, à tous les âges consécutifs après celui de la tête donnée, par le nombre de vivans à cet âge, et le quotient sera la valeur demandée.

Dans un des chapitres suivans, je montrerai qu'on doit ajouter $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{8}$ à la valeur ainsi trouvée, pour obtenir celle d'une semblable annuité sur la tête A considérée comme touchant la rente par semestre, ou par trimestre; mais si on la considère comme la touchant instantanément, nous devrons ajouter $\frac{1}{2}$ à la valeur trouvée. Dans ce dernier cas, la valeur demandée est égale aux sommes des probabilités que cette tête a d'atteindre les premier, second, troisième.... instans depuis le moment actuel jusqu'à la fin de son existence possible; c'est ce que plusieurs auteurs ont appelé la vie moyenne, ou le nombre d'années que l'une quelconque de toutes les têtes existant au même âge peut être considérée comme certaine d'atteindre. D'où la règle suivante pour trouver la *vie moyenne*.

53. Divisez la somme des nombres de vivans, à tous les âges consécutifs qui suivent celui de la tête

proposée, par le nombre de vivans à cet âge; ajoutez $\frac{1}{2}$ au quotient, et la somme sera la valeur demandée.

54. Comme nous pourrons avoir occasion de déterminer cette valeur pour comparer les probabilités de vie ou les valeurs des annuités suivant différentes tables d'observations, ou pour calculer par approximation certaines valeurs dont je parlerai par la suite, j'ai donné ici la règle par laquelle on peut trouver cette valeur d'après une table quelconque d'observations.

Mais à la table II, à la fin de ce Traité, j'ai indiqué la vie moyenne de 5 ans en 5 ans, d'après les diverses observations mentionnées au n° 13: et aux tables IV, XV, XXVI et XLVI, j'ai indiqué d'année en année la vie moyenne à tous les âges, d'après les observations qui précèdent immédiatement ces tables.

PROBLÈME II.

55. Trouver la valeur d'une annuité payable jusqu'au *dernier décès* d'un nombre quelconque de têtes.

SOLUTION.

Soient A, B, C, ... les têtes sur lesquelles est constituée l'annuité, et désignons comme au n° 23 les probabilités que chaque tête a de subsister 1, 2, 3.... ans. Alors, la probabilité que l'une ou l'autre de ces têtes a de subsister à la fin de la première année

sera d'après le n° 26 : $1 - \left(1 - \frac{a'}{a}\right) \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right) \times \left(1 - \frac{c'}{c}\right) \times \text{etc.} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \text{etc.} - \frac{a'b'}{ab} - \frac{a'c'}{ac} - \frac{b'c'}{bc} - \text{etc.} + \frac{a'b'c'}{abc} + \text{etc.}$, expression qui étant multipliée par $(1 + \rho)^{-1}$, ou la valeur actuelle de 1 fr. payable dans un an, donnera la valeur actuelle de la rente de la première année, ou l'espérance qu'on a de recevoir cette rente, l'une quelconque des têtes subsistant à la fin de la première année. De la même manière, la probabilité que l'une ou l'autre des têtes proposées a de subsister à la fin de la seconde année étant $1 - \left(1 - \frac{a''}{a}\right) \times \left(1 - \frac{b''}{b}\right) \times \left(1 - \frac{c''}{c}\right) \times \text{etc.} = \frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{c''}{c} + \text{etc.} - \frac{a''b''}{ab} - \frac{a''c''}{ac} - \frac{b''c''}{bc} - \text{etc.} + \frac{a''b''c''}{abc} + \text{etc.}$, cette expression multipliée par $(1 + \rho)^{-2}$ ou la valeur actuelle de 1 fr. payable dans deux ans, donnera la valeur actuelle de la rente de la seconde année. De même encore l'expression $1 - \left(1 - \frac{a'''}{a}\right) \times \left(1 - \frac{b'''}{b}\right) \times \left(1 - \frac{c'''}{c}\right) \times \text{etc.} = \frac{a'''}{a} + \frac{b'''}{b} + \frac{c'''}{c} + \text{etc.} - \frac{a'''b'''}{ab} - \frac{a'''c'''}{ac} - \frac{b'''c'''}{bc} - \text{etc.} + \frac{a'''b'''c'''}{abc} + \text{etc.}$, étant multipliée par $(1 + \rho)^{-3}$ donnera la valeur actuelle de la rente de la troisième année. Et ainsi de suite pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et la somme de toutes ces espérances par-

tielles, ou la série

$$\frac{1}{(1+p)}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\text{etc.}-\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'c'}{ac}-\frac{b'c'}{bc}-\text{etc.}+\frac{a'b'c'}{abc}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a''}{a}+\frac{b''}{b}+\frac{c''}{c}+\text{etc.}-\frac{a''b''}{ab}-\frac{a''c''}{ac}-\frac{b''c''}{bc}-\text{etc.}+\frac{a''b''c''}{abc}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a'''}{a}+\frac{b'''}{b}+\frac{c'''}{c}+\text{etc.}-\frac{a'''b'''}{ab}-\frac{a'''c'''}{ac}-\frac{b'''c'''}{bc}-\text{etc.}+\frac{a'''b'''c'''}{abc}+\text{etc.}\right)$$
$$+\text{ etc.}$$

sera la valeur totale actuelle de l'annuité demandée.

56. Mais la première colonne verticale de cette expression est la valeur d'une annuité sur la tête A; la seconde est la valeur d'une annuité sur la tête B; la troisième est la valeur d'une annuité sur la tête C; etc. De la même manière, les quatrième, cinquième et sixième colonnes verticales sont les valeurs d'une annuité sur les groupes de têtes AB, AC, BC, etc., et ainsi de suite. Donc si nous substituons respectivement à ces valeurs les caractères adoptés au prob. I, cor. 1. la formule générale deviendra $A+B+C+$ etc. $-AB-AC-BC-$ etc. $+ABC+$ etc., et par conséquent la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès des têtes proposées, est égale à la somme des valeurs d'une annuité sur chacune de ces têtes isolément, *moins* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes que forment ces têtes en les combinant deux à deux; *plus* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes que forment ces têtes en les combinant trois à trois; *moins* la somme des valeurs d'une annuité sur les groupes qu'elles forment en les combinant quatre à quatre, et ainsi de suite. Donc, quand on donne les valeurs d'une annuité sur cha-

cune des têtes proposées et sur les divers groupes provenant de leur combinaison, il est facile de déterminer la valeur d'une annuité payable jusqu'à leur dernier décès. Pour la facilité des raisonnemens, j'appellerai L cette valeur, et j'aurai soin toutes les fois que je ferai usage de ce caractère, d'indiquer le nombre de têtes sur lesquelles repose l'annuité.

Voyez, pour l'application de ce problème, les questions VIII et IX du chapitre XII.

Corollaire 1.

57. Si toutes les têtes sont égales, ou du même âge que A et que leur nombre soit représenté par n, alors la probabilité que l'une ou l'autre de ces têtes a de subsister après un an, deux ans, trois ans, etc., sera représentée respectivement par

$$1-\left(1-\frac{a'}{a}\right)^n,\ 1-\left(1-\frac{a''}{a}\right)^n,\ 1-\left(1-\frac{a'''}{a}\right)^n,\ \text{etc.}$$

Si l'on développe ces quantités au moyen de la formule du binome, et qu'on les multiplie respectivement par la valeur actuelle de 1 fr. payable après ces divers délais, leur somme, ou la série

$$\frac{1}{(1+\rho)}\left[n.\frac{a'}{a}-\frac{n(n-1)a'a'}{2aa}+\frac{n.(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}.\frac{a'a'a'}{aaa}-\text{etc.}\right]$$
$$+\frac{1}{(1+\rho)^2}\left[n.\frac{a''}{a}-\frac{n(n-1)a''a''}{2aa}+\frac{n.(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}.\frac{a''a''a''}{aaa}-\text{etc.}\right]$$
$$+\frac{1}{(1+\rho)^3}\left[n.\frac{a'''}{a}-\frac{n(n-1)a'''a'''}{2aa}+\frac{n.(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}.\frac{a'''a'''a'''}{aaa}-\text{etc.}\right]$$
$$+\ \text{etc.}$$

sera la valeur totale actuelle de l'annuité demandée.

58. Donc (si nous appelons AA, AAA, etc., la valeur d'une annuité sur un groupe de deux, trois, etc., têtes égales) la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès d'un nombre quelconque de têtes, toutes de l'âge de A, sera

$$nA - \frac{n(n-1)}{2} AA + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} AAA - \text{etc.}$$

S'il n'y avait que 2 têtes, cette formule deviendrait $2A - AA$; s'il y en avait trois, elle serait $3A - 3AA + AAA$; quatre, $4A - 6AA + 4AAA - AAAA$; et ainsi de suite.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, la question VIII du chapitre XII.

Corollaire 2.

59. Si nous voulons déterminer la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès, et différée du délai n, il sera évident (d'après ce qui a été dit au prob. I, cor. 3), que les diverses séries verticales de la page 41 ne doivent commencer qu'au $(n+1)^e$ terme, et continuer alors jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. Donc la valeur de l'annuité différée demandée sera égale à $A^d + B^d + C^d - (AB)^d - (AC)^d - (BC)^d + (ABC)^d$, expression que je désignerai par L^d. Or si nous substituons à chacune de ces quantités sa valeur correspondante d'après les principes du n° 44, la formule que nous désignons par L^d deviendrait

$$A^o \times \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} + B^o \times \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n} + C^o \times \frac{\gamma}{c}(1+\rho)^{-n}$$
$$- A^o B^o \times \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n} - A^o C^o \times \frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$- B^o C^o \times \frac{\beta\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n} + A^o B^o C^o \times \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n},$$

expression plus commode pour l'usage, et dont on peut déduire la règle suivante.

60. Substituez dans la règle générale du problème les valeurs des annuités différées sur une ou plusieurs têtes, aux valeurs des annuités payables durant toute l'existence des mêmes têtes, et opérez comme la règle l'indique avec ces valeurs substituées; le résultat sera l'annuité demandée.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, la question XI du chapitre XII.

Corollaire 3.

61. Si la jouissance d'une annuité, payable jusqu'au dernier décès d'un nombre quelconque de têtes, et différée d'un nombre d'années n, dépend encore de l'existence simultanée de toutes les têtes à l'expiration de ces n années, sa valeur sera égale à $E^{\circ} \times \frac{a_n b_n c_n}{abc}(1+\rho)^{-n}$; c'est-à-dire égale à la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès d'un même nombre de têtes plus âgées chacune de n années que les têtes proposées, multipliée par l'espérance que le *groupe* de ces têtes a de recevoir 1 fr. à l'expiration de ce délai; et cette question doit être soigneusement distinguée de celle qui a fait l'objet du dernier corollaire.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, le scolie de la question XI, au chapitre XII.

Corollaire 4.

62. Après avoir trouvé, au moyen du second corollaire de ce problème, la valeur d'une annuité

'e, payable jusqu'au dernier décès d'un nombre
ınque de têtes, nous pourrons aisément déter-
là valeur d'une annuité temporaire dans les
s circonstances; il suffira de prendre la diffé-
entre cette annuité différée, et la valeur d'une
ıble annuité immédiate trouvée par la formule
problème. Ainsi la formule $L - L^d$ désignera
ous les cas la valeur de cette annuité temporaire;
vons déjà trouvé une formule semblable au n° 46,
et des groupes de têtes.

ez, pour l'application de ce corollaire, la
on XII du chapitre XII.

PROBLÈME III.

Trouver la valeur d'une annuité sur un nom-
elconque de têtes, cette annuité n'étant payable
nt qu'un nombre déterminé d'entre elles, *n*,
eront ensemble.

SOLUTION.

ent A, B, C,.... les têtes sur lesquelles re-
l'annuité, et désignons, comme au n° 23, les
bilités que chacune des têtes a de subsister 1,
... ans. Maintenant, si nous restreignons cette
on à celle d'une annuité sur trois têtes, payable
u'il en existera deux, il est évident que la chance
a de recevoir l'annuité une année quelconque
dra de l'un de ces quatre événemens différens:
les trois têtes subsisteront ensemble à la fin
te année, événement dont la probabilité est,

pour la première année, $\frac{a'b'c'}{abc}$; 2°. ou A et B seront alors vivans et C mort, événement dont la probabilité est, pour la première année, $\frac{a'b'}{ab} \times \left(1 - \frac{c'}{c}\right)$; 3°. ou A et C seront alors vivans et B mort, événement dont la probabilité est, pour la même année, $\frac{a'c'}{ac} \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right)$; 4°. ou enfin B et C seront alors vivans et A mort, événement dont la probabilité est, pour la même année, $\frac{b'c'}{bc} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right)$. Donc la somme de ces quatre chances, ou $\frac{a'b'c'}{abc} + \frac{a'b'}{b} \times \left(1 - \frac{c'}{c}\right) + \frac{a'c'}{ac} \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right) + \frac{b'c'}{bc} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right) = \frac{a'b'}{ab} + \frac{a'c'}{ac} + \frac{b'c'}{bc} - \frac{2a'b'c'}{abc}$, étant multipliée par $(1 + \rho)^{-1}$ donnera la valeur actuelle de la rente de la première année, ou l'espérance qu'on a de recevoir cette somme, payable si deux quelconques des têtes proposées survivent à la première année. En raisonnant de la même manière, on trouvera que $\frac{a''b''}{ab} + \frac{a''c''}{ac} + \frac{b''c''}{bc} - \frac{2a''b''c''}{abc}$, multiplié par $(1 - \rho)^{-2}$, donnera la valeur actuelle de la rente de la seconde année. De même encore, $\frac{a'''b'''}{ab} + \frac{a'''c'''}{ac} + \frac{b'''c'''}{bc} - \frac{2a'''b'''c'''}{abc}$, multiplié par $(1 + \rho)^{-3}$ donnera la valeur actuelle de la rente de la troisième année, et ainsi de suite pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et la somme de toutes ces espérances, ou la

série

$$(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{a'b'}{ab}+\frac{a'c'}{ac}+\frac{b'c'}{bc}-2\frac{a'b'c'}{abc}\right)+$$
$$(1+\rho)^{-2}\times\left(\frac{a''b''}{ab}+\frac{a''c''}{ac}+\frac{b''c''}{bc}-2\frac{a''b''c''}{abc}\right)+$$
$$(1+\rho)^{-3}\times\left(\frac{a'''b'''}{ab}+\frac{a'''c'''}{ac}+\frac{b'''c'''}{bc}-2\frac{a'''b'''c'''}{abc}\right)+\text{ etc., etc.}$$

sera la valeur totale actuelle de l'annuité demandée.

64. Mais si nous ajoutons séparément, comme dans le problème précédent, les quantités de chaque colonne verticale, et que nous fassions usage des caractères du problème I, corollaire 1, l'expression ci-dessus deviendra $AB+AC+BC-2ABC$, d'où l'on tire la règle suivante pour résoudre la question qui nous occupe.

De la somme des valeurs d'une annuité sur les trois groupes de deux têtes provenant de la combinaison des têtes proposées, retranchez la double valeur d'une annuité sur le groupe des trois têtes; le reste sera la valeur d'une annuité payable tant que deux de ces têtes subsisteront ensemble.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, la question X du chapitre XII.

65. En raisonnant de la même manière, on trouvera la valeur d'une annuité sur quatre têtes, payable tant qu'il en subsistera *deux* ou *trois* (les autres questions qui s'appliquent à ces têtes étant déjà résolues dans les deux problèmes précédens), et en général la valeur d'une annuité sur un nombre quelconque de têtes, payable seulement tant qu'il en sub-

sistera un nombre déterminé. Toutefois, comme il est bien rare qu'il s'agisse, dans la pratique, de plus de trois têtes, je me contenterai d'indiquer la formule générale qui comprend tous les cas possibles de ces trois problèmes, sans développer les raisonnemens qui y conduisent. Désignons donc la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison n à n des têtes proposées, par S, $(n+1)$ à $(n+1)$, par S', $(n+2)$ à $(n+2)$ par S'', et ainsi de suite. Alors, la valeur d'une annuité sur un nombre quelconque de têtes, payable aussi long-temps qu'il en subsistera un nombre déterminé n, sera représentée par

$$S - nS' + \frac{n}{1} \cdot \frac{(n+1)}{2} S'' - \frac{n}{1} \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)}{3} S''' + \text{etc.}$$

Corollaire 1.

66. Si l'annuité n'est pas payable pendant toute l'existence des têtes proposées, mais est ou différée ou temporaire, nous devrons raisonner comme nous l'avons fait au problème II, corollaires 2 et 4, et nous trouverons que la valeur d'une annuité différée, payable tant que deux de trois têtes données subsisteront, sera exprimée par $(AB)^d + (AC)^d + (BC)^d - 2(ABC)^d$; donc si, dans la formule du n° 64, nous substituons aux valeurs d'une annuité pour toute l'existence des têtes proposées, celles d'une annuité différée sur les mêmes têtes, nous obtiendrons la valeur de l'annuité différée avec la circonstance qui fait l'objet de ce problème.

Et cette valeur, retranchée de celle d'une semblable annuité pour toute la durée de l'existence des têtes proposées, donnera la valeur d'une semblable annuité temporaire sur deux quelconques des trois têtes données.

Corollaire 2.

67. Si cette annuité différée dépend de l'existence simultanée de toutes les têtes proposées à l'expiration du délai dont elle est différée, sa valeur sera égale à la valeur d'une annuité semblable sur un même nombre de têtes plus âgées chacune que les têtes proposées d'un nombre d'années égal à ce délai, multipliée par l'espérance que le groupe de ces têtes a de recevoir 1 fr. à l'expiration de ce délai; et l'on doit distinguer soigneusement cette question de celle qu'a résolue la première partie du corollaire précédent.

CHAPITRE III.

DES REVERSIONS.

68. J'entends en général par annuité *en reversion* toute rente qui, reposant sur un nombre quelconque de têtes, n'est payable qu'après un délai fixé, ou après l'extinction d'un autre nombre quelconque de têtes. La première classe désigne donc toutes les annuités différées dont j'ai parlé au prob. I, cor. 3; maintenant je vais m'occuper de la seconde, et je ferai observer ici que je continuerai à désigner les premières par la dénomination d'annuités viagères *différées*, appliquant spécialement le terme d'annuités viagères *en reversion* à celles dont on ne doit jouir qu'après l'extinction de quelque autre tête. Les diverses divisions qu'embrasse cette question peuvent se réduire aux quatre problèmes suivans.

PROBLÈME IV.

69. Trouver la valeur d'une annuité reposant sur un groupe quelconque de têtes ABC...., après la dissolution d'un autre groupe de têtes PQR....

SOLUTION.

Désignons, comme dans le n° 24, les probabilités que le groupe ABC.... a de subsister 1, 2, 3.... ans

par $\frac{a'b'c'}{abc}$, $\frac{a''b''c''}{abc}$, $\frac{a'''b'''c'''}{abc}$, et les probabilités que le groupe PQR.... a de subsister 1, 2, 3.... ans, par $\frac{p'q'r'}{pqr}$, $\frac{p''q''r''}{pqr}$, $\frac{p'''q'''r'''}{pqr}$, etc. Or la chance que le groupe ABC a de recevoir l'annuité une année quelconque, dépendra de son existence à la fin de cette année, et de la dissolution du groupe PQR avant la fin de cette même année. La probabilité de cet événement est, pour la première année, $\frac{a'b'c'}{abc}\left(1-\frac{p'q'r'}{pqr}\right)$; qui, multiplié par $(1+\rho)^{-1}$, donnera la valeur actuelle de la rente de la première année. On trouvera de même que $\frac{a''b''c''}{abc}\left(1-\frac{p''q''r''}{pqr}\right)$ multiplié par $(1+\rho)^{-2}$ désignera la valeur actuelle de la rente de la seconde année, et $\frac{a'''b'''c'''}{abc}\left(1-\frac{p'''q'''r'''}{pqr}\right)$, multiplié par $(1+\rho)^{-3}$, celle de la rente de la troisième année; et ainsi de suite pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine; et la somme de tous ces termes, ou la série

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+\rho)}\left(\frac{a'b'c'}{abc}-\frac{a'b'c'p'q'r'}{abcpqr}\right)\\
&+\frac{1}{(1+\rho)^2}\left(\frac{a''b''c''}{abc}-\frac{a''b''c''p''q''r''}{abcpqr}\right)\\
&+\frac{1}{(1+\rho)^3}\left(\frac{a'''b'''c'''}{abc}-\frac{a'''b'''c'''p'''q'''r'''}{abcpqr}\right)\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

sera la valeur totale actuelle de l'annuité demandée.

Mais la somme des colonnes verticales est évidemment égale à $ABC - ABCPQR$.

70. D'où il suit que si l'on retranche la valeur d'une annuité sur un groupe composé de toutes les têtes proposées, de la valeur d'une annuité sur le groupe des têtes en reversion: le reste sera la valeur de l'annuité en reversion demandée.

PROBLÈME V.

71. Trouver la valeur d'une annuité reposant sur un groupe quelconque de têtes ABC..., après le dernier décès d'un autre nombre quelconque de têtes P, Q, R,....

SOLUTION.

Désignons, comme dans le dernier problème, les probabilités que les têtes proposées ont de vivre 1, 2, 3,... ans. Or la chance que le groupe ABC a de recevoir l'annuité à la fin d'une année quelconque, dépendra de son existence à la fin de cette année, et de l'extinction de toutes les têtes P, Q, R, avant la fin de cette même année. La probabilité de cet événement est, pour la première année, $\frac{a'b'c'}{abc}\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ $\times\left(1-\frac{q'}{q}\right)\times\left(1-\frac{r'}{r}\right)$, expression qui, multipliée par $(1+\rho)^{-1}$, donnera la valeur actuelle de la rente de la première année. De la même manière, $\frac{a''b''c''}{abc}\left(1-\frac{p''}{p}\right)$ $\times\left(1-\frac{q''}{q}\right)\times\left(1-\frac{r''}{r}\right)$ multiplié par $(1+\rho)^{-2}$, et $\frac{a'''b'''c'''}{abc}\left(1-\frac{p'''}{p}\right)\times\left(1-\frac{q'''}{q}\right)\times\left(1-\frac{r'''}{r}\right)$ multiplié par $(1+\rho)^{-3}$, désigneront respectivement les valeurs de

la rente de la seconde et de la troisième année; et ainsi de suite pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et la somme de tous ces termes sera la valeur totale actuelle de l'annuité demandée. Mais ces expressions, développées et simplifiées, sont égales à la série

$$\frac{a'b'c'}{abc\,(1+\rho)}\left(1-\frac{p'}{p}-\frac{q'}{q}-\frac{r'}{r}+\frac{p'q'}{pq}+\frac{p'r'}{pr}+\frac{q'r'}{qr}-\frac{p'q'r'}{pqr}\right)$$
$$+\frac{a''b''c''}{abc\,(1+\rho)^2}\left(1-\frac{p''}{p}-\frac{q''}{q}-\frac{r''}{r}+\frac{p''q''}{pq}+\frac{p''r''}{pr}+\frac{q''r''}{qr}-\frac{p''q''r''}{pqr}\right)$$
$$+\frac{a'''b'''c'''}{abc\,(1+\rho)^3}\left(1-\frac{p'''}{p}-\frac{q'''}{q}-\frac{r'''}{r}+\frac{p'''q'''}{pq}+\frac{p'''r'''}{pr}+\frac{q'''r'''}{qr}-\frac{p'''q'''r'''}{pqr}\right)$$
$$+\text{etc.}$$

dont la somme est évidemment égale à $ABC - ABCP - ABCQ - ABCR + ABCPQ + ABCPR + ABCQR - ABCPQR$.

72. D'où suit que la valeur d'une annuité en réversion sur un groupe quelconque ABC...., après le dernier décès d'un autre nombre de têtes P, Q, R,... est égale à la valeur d'une annuité sur le groupe de toutes les têtes en reversion, *moins* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison de toutes les têtes en reversion avec les autres têtes une à une, *plus* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison de toutes les têtes en reversion avec les autres têtes deux à deux, *moins* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la

combinaison de toutes les têtes en reversion avec les autres têtes trois à trois, et ainsi de suite.

PROBLÈME VI.

73. Trouver la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès d'un nombre quelconque de têtes A, B, C,.... après la dissolution d'un groupe quelconque d'autres têtes PQR....

SOLUTION.

La chance qu'une quelconque des têtes A, B, C, a de recevoir l'annuité à la fin d'une année quelconque, dépendra de l'existence de l'une d'elles, à la fin de cette année, et de la dissolution du groupe PQR...., avant la fin de cette même année. La probabilité de cet événement est, pour la première année, $\left[1-\left(1-\frac{a'}{a}\right)\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'}{c}\right)\right]\times\left(1-\frac{p'q'r'}{pqr}\right)$, qui, multiplié par $(1+\rho)^{-1}$, donnera la valeur actuelle de la rente de la première année. De la même manière, on trouvera que $\left[1-\left(1-\frac{a''}{a}\right)\times\left(1-\frac{b''}{b}\right)\times\left(1-\frac{c''}{c}\right)\right]\times\left(1-\frac{p''q''r''}{pqr}\right)$, multiplié par $(1+\rho)^{-2}$, et que $\left[1-\left(1-\frac{a'''}{a}\right)\times\left(1-\frac{b'''}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'''}{c}\right)\right]\times\left(1-\frac{p'''q'''r'''}{pqr}\right)$, multiplié par $(1+\rho)^{-3}$, donneront respectivement la valeur actuelle des rentes de la seconde et de la troisième années, et ainsi de suite pour toutes les années sui-

vantes jusqu'aux dernières limites de la vie humaine ; et la somme de tous ces termes sera la valeur totale actuelle de l'annuité demandée. Mais si l'on développe et simplifie ces diverses espérances annuelles, et qu'on les dispose les unes sous les autres, comme dans les problèmes précédens, elles formeront quatorze colonnes verticales dont la somme sera trouvée égale à $A+B+C-AB-AC-BC+ABC-PQRA-PQRB-PQRC+PQRAB+PQRAC+PQRBC-PQRABC$.

74. D'où il suit que la valeur d'une annuité en reversion, payable jusqu'au dernier décès d'un nombre quelconque de têtes après la dissolution d'un groupe quelconque d'autres têtes, est égale à la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès de toutes les têtes en reversion; *moins* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison de toutes les têtes en possession avec les autres têtes une à une; *plus* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison de toutes les têtes en possession avec les autres têtes deux à deux; *moins* la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison de toutes les têtes en possession avec les autres têtes trois à trois, et ainsi de suite.

PROBLÈME VII.

75. Trouver la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès d'un nombre quelconque de têtes

A, B, C,.... après le dernier décès d'un autre nombre quelconque de têtes P, Q, R,....

SOLUTION.

D'après ce qui a été dit dans les problèmes précédens, il est évident que l'annuité en question doit courir jusqu'au dernier décès de toutes les têtes désignées par A, B, C, P, Q, R; et l'on n'aurait aucune autre chose à considérer, si les têtes A, B, C, devaient entrer immédiatement en jouissance. Mais comme elles ne doivent rien recevoir pendant l'existence de l'une quelconque des têtes P, Q, R, on doit nécessairement retrancher la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès de ces têtes, de la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès de toutes les têtes impliquées dans la question. Le reste sera la valeur de l'annuité demandée.

Scolie.

76. Au moyen de ces quatre problèmes, on peut résoudre toutes les questions sur les annuités en reversion. Je les ai traités avec étendue, pour ne rien laisser à désirer, mais on verra aisément qu'ils comprennent beaucoup de combinaisons qui ne se rencontrent jamais dans la pratique, et au milieu de règles et de formules aussi compliquées, une prompte solution ne se présenterait donc pas immédiatement. Il est bien rare que plus que trois têtes se trouvent impliquées dans des questions de ce genre : afin donc que pour résoudre ces questions on ne soit pas obligé d'avoir

ecours aux problèmes généraux, j'ai réuni tous les as possibles où il ne s'agit pas de plus de trois têtes, t j'en ai donné la solution algébrique, en conservant A, B, P, Q, la signification donnée à ces caractères lans les problèmes précédens. Ces questions sont au ıombre de cinq; on peut avoir à trouver la valeur l'une annuité:

1°. Sur une seule tête A, après un autre tête P: lans ce cas, la valeur de l'annuité en reversion est $A-AP$.

2°. Sur une seule tête A, après le dernier décès de 2 têtes P, Q: Dans ce cas, la valeur de l'annuité en reversion est $A-AP-AQ+APQ$.

3°. Sur la dernière vivante de deux têtes A, B, après une seule tête P: dans ce cas, la valeur de l'annuité en reversion est $A+B-AB-AP-BP+ABP$.

4°. Sur une seule tête A, après la dissolution d'un groupe PQ: dans ce cas, la valeur de l'annuité en reversion est égale à $A-APQ$.

5°. Ou enfin sur le groupe AB, après un seule tête P: dans ce cas, la valeur de l'annuité en reversion est $AB-ABP$.

Voyez les exemples de ces différens cas, aux questions XIII et XVII du chapitre XII.

Corollaire 1.

77. Si l'annuité ne doit pas courir pendant toute l'existence des têtes proposées, mais est ou différée ou temporaire, nous devons nous référer à ce qui a été dit au prob. I cor. 3 et 4; en faisant quelques substitutions, qu'indiquera suffisamment l'énoncé du pro-

blème, on appliquera la règle générale que j'y ai donnée, à la question proposée d'une annuité en reversion.

Mais cette règle peut devenir d'une application plus facile si l'on fait usage des principes du prob. II, cor. 2 et 4. Ainsi, dans le premier cas du scolie n° 76, si l'annuité est différée de n années, sa valeur sera

$$(A)^d - (AP)^d = A^n + \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - A^n P^n + \frac{\alpha\pi}{ap}(1+\rho)^{-n} \text{(1)}$$

Et cette valeur retranchée de $A - AP$ donnera la valeur d'une semblable annuité en reversion *temporaire* On résoudra de la même manière toutes les autre questions du scolie.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, le questions XVIII et XIX du chapitre XII.

Corollaire 2.

78. Si une annuité en reversion, dont la jouissance est différée d'un nombre quelconque d'années dépend encore de l'existence simultanée de toute les têtes à l'expiration de ce délai, sa valeur ser égale à celle d'une annuité en reversion reposant su un même nombre de têtes plus âgées chacune que le têtes proposées d'un nombre d'années égal à ce déla

(1) D'après la méthode de désignation que j'ai employ dans tout le cours de cet ouvrage, on verra aisément que désigne ici le nombre de vivans à un âge plus élevé de n an nées que celui de P.

pliée par la probabilité que le groupe des têtes
sées a de subsister à l'expiration de ce délai, et
: par la valeur actuelle de 1 fr. payable à la même
e. Et l'on doit distinguer soigneusement cette
on de celle qui a fait l'objet du dernier corollaire.
rez pour l'application de ce corollaire, le scolie
question XIX au chapitre XII.

CHAPITRE IV.

DES SURVIVANCES.

79. Dans les chapitres précédens, j'ai recherché la valeur des annuités dépendant de l'existence d'un nombre déterminé de têtes, faisant partie d'un nombre quelconque de têtes proposées, et ensuite la valeur des annuités en reversion sur un nombre quelconque de têtes, après l'extinction d'un nombre quelconque d'autres têtes. Maintenant je vais traiter des questions d'une nature plus compliquée, dans lesquelles la valeur de l'annuité dépend non-seulement de la continuation de l'existence des têtes proposées, mais encore de l'ordre de survivance qui s'établit entre elles. Dans les questions de ce genre, souvent l'annuité est possédée en proportions inégales par les diverses personnes sur la tête desquelles elle repose; aussi sont-elles susceptibles d'une grande variété. Au reste, les problèmes suivans en feront mieux connaître la nature et l'étendue.

PROBLÈME VIII.

80. A, B, et C conviennent d'acheter une annuité payable jusqu'à leur dernier décès, annuité qu'ils partageront également entre eux durant leur existence simultanée, qu'au décès de l'un deux, les deux survivans se partageront encore également, et dont enfin le der-

nier vivant jouira seul jusqu'à son décès : trouver la valeur de leurs quote-parts respectives, ou la proportion dans laquelle chacun d'eux doit contribuer à l'achat.

SOLUTION.

Désignons, comme au n° 23, les probabilités qu'ont les têtes proposées de subsister 1, 2, 3,.. ans; et occupons-nous d'abord de déterminer la quote-part de A. Or, l'espérance que A a de recevoir quelque chose à la fin d'une année quelconque peut être considérée de quatre manières, comme dépendant d'autant d'événemens différens : 1° A, B et C peuvent subsister tous les trois, événement dont la probabilité est à la fin de la première année $\frac{a'b'c'}{abc}$: dans ce cas il recevra le tiers de l'annuité, ou $\frac{1}{3}(1+\rho)^{-1}$; donc $(1+\rho)^{-1} \times \frac{a'b'c'}{3abc}$ sera la valeur de cette espérance. 2° A et B peuvent être vivans, et C mort, événement dont la probabilité est pour la première année $\frac{a'b'}{ab} \times \left(1 - \frac{c'}{c}\right)$: dans ce cas il recevra la moitié de l'annuité, ou $\frac{1}{2}(1+\rho)^{-1}$; donc $(1+\rho)^{-1} \times \frac{a'b'}{2ab} \times \left(1 - \frac{c'}{c}\right)$ sera la valeur de cette espérance. 3° A et C peuvent être vivans et B mort, événement dont la probabilité est à la fin de la première année $\frac{a'c'}{ac} \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right)$: dans ce cas, il recevra également la moitié de l'annuité, ou $\frac{1}{2}(1+\rho)^{-1}$ Donc $(1+\rho)^{-1} \times \frac{a'c'}{2ac} \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right)$ sera la valeur de

cette espérance. 4° A peut être la seule personne vivante, événement dont la probabilité est pour la première année $\frac{a'}{a}\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'}{c}\right)$; dans ce cas il recevra l'annuité entière, ainsi

$$(1+\rho)^{-1}\times\frac{a'}{a}\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'}{c}\right)$$

sera la valeur de cette espérance. Et la somme de toutes ces valeurs, ou $(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{2ab}-\frac{a'c'}{2ac}+\frac{a'b'c'}{3abc}\right)$ sera la valeur totale de l'espérance de A par rapport à la rente de la première année.

En raisonnant de la même manière, on trouvera que $(1+\rho)^{-2}\times\left(\frac{a''}{a}-\frac{a''b''}{2ab}-\frac{a''c''}{2ac}+\frac{a''b''c''}{3abc}\right)$ désignera la valeur de son espérance pour la seconde année, et $(1+\rho)^{-3}\times\left(\frac{a'''}{a}-\frac{a'''b'''}{2ab}-\frac{a'''c'''}{2ac}+\frac{a'''b'''c'''}{3abc}\right)$ la valeur de son espérance pour la troisième année, et ainsi de suite jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de tous ces termes, ou la série

$$(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{2ab}-\frac{a'c'}{2ac}+\frac{a'b'c'}{3abc}\right)$$
$$+(1+\rho)^{-2}\times\left(\frac{a''}{a}-\frac{a''b''}{2ab}-\frac{a''c''}{2a}+\frac{a''b''}{3abc}\right)$$
$$+(1+\rho)^{-3}\times\left(\frac{a'''}{a}-\frac{a'''b'''}{2ab}-\frac{a'''c'''}{2ac}+\frac{a'''b'''c'''}{3abc}\right)$$
$+$ etc., etc., etc.

sera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, ou la quote-part qu'il doit payer pour contribuer à l'achat.

Or la somme des diverses séries verticales est égale à $A - \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC + \frac{1}{3}ABC$.

81. Quant à la part de B ou de C, il est évident que l'espérance qu'ils ont de recevoir l'annuité une année quelconque, dépendra des mêmes événemens, *mutatis mutandis*, que celle de A : d'où il suit qu'en faisant les substitutions nécessaires à la formule générale ci-dessus, nous aurons $B - \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{3}ABC$ pour la valeur de la part de B; et $C - \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{3}ABC$ pour la valeur de la part de C dans l'annuité proposée : d'où la règle suivante qui s'applique à l'une quelconque des trois têtes.

82. De la valeur d'une annuité sur la tête proposée, retranchez la moitié de la somme des valeurs d'une annuité sur les deux groupes de têtes provenant de la combinaison de la tête proposée avec chacune des autres. Ajoutez au reste le tiers de la valeur d'une annuité sur le groupe des trois têtes; la somme sera la valeur demandée.

83. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans; que l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton. Alors si l'on consulte les tables qui sont à la fin de cet ouvrage, on trouvera que la part de chacune des trois têtes dans cette annuité sera : celle de

$$A = 16{,}033 - \frac{1}{2}(11{,}873 + 10{,}924) + \frac{1}{3} \times 8{,}986 = 7{,}636$$

$$B = 14{,}781 - \frac{1}{2}(11{,}873 + 10{,}490) + \frac{1}{3} \times 8{,}986 = 6{,}595$$

$$C = 13{,}197 - \frac{1}{2}(10{,}924 + 18{,}490) + \frac{1}{3} \times 8{,}986 = 5{,}485$$

Et la somme de ces parts respectives, ou 19,710, est la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès des trois têtes, ou la valeur totale de l'achat.

Corollaire 1.

84. S'il ne s'agissait que de 2 têtes, A et B, l'annuité devant être également partagée entre elles pendant leur existence simultanée pour appartenir en totalité au dernier vivant, la valeur de la part de A sera $A - \frac{1}{2} AB$, et celle de B sera $B - \frac{1}{2} AB$; d'où la règle suivante pour deux têtes.

85. De la valeur d'une annuité sur la tête proposée, retranchez la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe des deux têtes, le reste sera la valeur demandée.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, la question XX du chapitre XII.

Corollaire 2.

86. D'un autre côté, quel que soit le nombre des personnes intéressées dans l'achat, il sera facile de déterminer la part d'une tête quelconque, pourvu que l'annuité soit toujours également partagée entre les survivans. Soit en effet G la valeur d'une annuité sur la tête proposée; G' la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison de la tête proposée avec les autres têtes une à une; G'' la somme des valeurs d'une annuité sur tous les groupes de têtes provenant de la combinaison de la tête proposée avec les autres têtes deux à deux, et ainsi de suite. Alors $G - \frac{1}{2} G' + \frac{1}{3} G'' - \frac{1}{4} G''' +$ etc.

désignera la part de la tête proposée, ou la somme qu'elle doit payer pour contribuer à l'achat.

PROBLÈME IX.

87. A, B et C conviennent d'acheter une annuité payable jusqu'à leur dernier décès, annuité qui doit être partagée entre eux de la manière suivante. A et B la partageront également pendant leur existence simultanée, mais au décès de l'un d'eux, elle sera également partagée entre le survivant et C, pour appartenir enfin en totalité au dernier vivant. Trouver la valeur de leurs parts respectives.

SOLUTION.

L'espérance que A a de recevoir quelque chose à la fin d'une année quelconque, peut être considérée de trois manières, comme dépendant d'autant d'événemens différens. 1°. A et B peuvent être tous deux vivans, événement dont la probabilité est, à la fin de l'année, $\frac{a'b'}{ab}$; dans ce cas il recevra la moitié de l'annuité. 2°. A et C peuvent être vivans, et B mort, événement dont la probabilité est, pour la première année $\frac{a'c'}{ac}\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)$; dans ce cas il recevra aussi la moitié de l'annuité. 3°. A peut être le seul vivant, événement dont la probabilité est, pour la première année, $\frac{a'}{a}\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)\times\left(1-\frac{c'}{c}\right)$; dans ce cas il recevra toute l'annuité. Et la somme de toutes ces

valeurs, multipliée par $(1+\rho)^{-1}$, donnera $(1+\rho)^{-1}$ $\times \left(\frac{a'}{a} - \frac{a'b'}{2ab} - \frac{a'c'}{2ac} + \frac{a'b'c'}{2abc}\right)$ pour la valeur totale de l'espérance de A par rapport à la rente de la première année.

Par un raisonnement semblable nous trouverons la valeur de son espérance pour les seconde, troisième, etc. années, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de tous ces termes, ou la série

$$(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{a'}{a} - \frac{a'b'}{2ab} - \frac{a'c'}{2ac} + \frac{a'b'c'}{2abc}\right)$$
$$+ (1+\rho)^{-2}\times\left(\frac{a''}{a} - \frac{a''b''}{2ab} - \frac{a''c''}{2ac} + \frac{a''b''c''}{2abc}\right)$$
$$+ (1+\rho)^{-3}\times\left(\frac{a'''}{a} - \frac{a'''b'''}{2ab} - \frac{a'''c'''}{2ac} + \frac{a'''b'''c'''}{2abc}\right)$$
$$+ \text{etc., etc.}$$

sera la valeur totale de son intérêt dans cette annuité Mais la somme des colonnes verticales est évidemment $A - \frac{1}{2}\,AB - \frac{1}{2}\,AC + \frac{1}{2}\,ABC$; d'où nous déduisons la règle suivante :

88. De la valeur d'une annuité sur la tête A, retranchez la moitié de la somme des valeurs d'une annuité sur les groupes AB et AC; ajoutez au reste la valeur d'une annuité sur le groupe ABC; la somme sera la part pour laquelle la tête A doit contribuer à l'achat.

89. Quant à la valeur de la part de B, il est évident que son espérance pour une année quelconqu

dépendra des mêmes événemens, *mutatis mutandis*, que celle de A; donc en faisant les substitutions nécessaires dans l'expression générale ci-dessus, nous aurons $B - \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}ABC$ pour la valeur de l'intérêt de B dans cette annuité. D'où la règle suivante:

De la valeur d'une annuité sur la tête B, retranchez la moitié de la somme des valeurs d'une annuité sur les groupes AB et BC; ajoutez au reste la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe ABC; la somme sera la part pour laquelle la tête B doit contribuer à l'achat.

91. A l'égard de la part de C, on verra que son espérance pour une année quelconque peut être considérée de trois manières, comme dépendant d'autant d'événemens différens. 1° A et C peuvent être vivans et B mort, événement dont la probabilité est pour la première année $\frac{a'c'}{ac} \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right)$; dans ce cas il recevra la moitié de l'annuité. 2° B et C peuvent être vivans et A mort, événement dont la probabilité est pour la première année $\frac{b'c'}{bc} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right)$; dans ce cas il recevra aussi la moitié de l'annuité. 3° C peut être le seul vivant, événement dont la probabilité à la fin de la première année est

$$\frac{c'}{c} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right) \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right);$$

dans ce cas il recevra la totalité de l'annuité. Donc la somme de ces valeurs, multipliée par $(1 + \rho)^{-1}$,

donnera $(1+\rho)^{-1} \times \left(\frac{c'}{c} - \frac{a'c'}{2ac} - \frac{b'c'}{2bc}\right)$ pour la valeur totale de l'espérance de C par rapport à la rente de la première année.

En continuant le même raisonnement, nous trouverons la valeur de son espérance pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de tous ces termes donnera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, et sera évidemment trouvée égale à $C - \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC$; d'où la règle suivante :

92. De la valeur d'une annuité sur la tête C, retranchez la moitié de la somme des valeurs d'une annuité sur les groupes AC et BC; le reste sera la part pour laquelle la tête C doit contribuer à l'achat.

93. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans; que l'intérêt soit de 4 p. 100, et la mortalité conforme aux tables de Northampton. La part de chacune des trois têtes, dans cette annuité, sera : celle de

$$A = 16{,}033 - \tfrac{1}{2}(11{,}873 + 10{,}924) + \tfrac{1}{2} \times 8{,}986 = 9{,}127$$

$$B = 14{,}781 - \tfrac{1}{2}(11{,}873 + 10{,}490) + \tfrac{1}{2} \times 8{,}986 = 8{,}093$$

$$C = 13{,}197 - \tfrac{1}{2}(10{,}924 + 10{,}490) \ldots\ldots\ldots = 2{,}490$$

et la somme de ces trois valeurs est celle d'une annuité payable jusqu'au dernier décès des têtes proposées.

PROBLÈME X.

94. A, B et C conviennent d'acheter une annuité payable jusqu'à leur dernier décès, annuité qui doit être partagée entre eux de la manière suivante. A et B en jouiront également pendant leur existence simultanée; si A meurt le premier, B et C se la partageront également pendant leur existence simultanée, et le dernier vivant en aura la totalité; mais si B meurt le premier, A aura pendant toute sa vie la jouissance de la totalité, qui sera reversible sur C après le décès de A. Trouver la valeur de leurs parts respectives.

SOLUTION.

L'espérance que A a de recevoir quelque chose à la fin d'une année quelconque, peut être considérée de deux manières, comme dépendant d'autant d'événemens différens, 1°. A et B peuvent vivre tous deux, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{a'b'}{ab}$; dans ce cas, il recevra la moitié de l'annuité; 2°. A peut être vivant et B mort, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{a'}{a}\times\left(1-\frac{b'}{b}\right)$; dans ce cas, il jouira de la totalité de l'annuité. La somme de ces deux valeurs, multipliée par $(1+\rho)^{-1}$ donnera....... $(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{2ab}\right)$ pour la valeur totale de l'espérance de A par rapport à la rente de la première année.

En continuant ce raisonnement, nous trouverons la valeur de son espérance pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de tous ces termes sera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, et sera trouvée égale à $A-\frac{1}{2}AB$; d'où la règle suivante :

95. De la valeur d'une annuité sur la tête A, retranchez la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe AB; le reste sera la part pour laquelle A doit contribuer à l'achat.

96. Quant à la part de B, on doit observer que l'espérance qu'il a de recevoir quelque chose à la fin d'une année quelconque, peut être considérée de trois manières, comme dépendant d'autant d'événemens différens; 1°. A et B peuvent vivre tous deux, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{a'b'}{ab}$; dans ce cas, il recevra la moitié de l'annuité; 2°. B et C peuvent être vivans et A mort, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{b'c'}{bc}\times\left(1-\frac{a'}{a}\right)$; dans ce cas il recevra aussi la moitié de l'annuité. 3°. B peut être le seul vivant, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{b'}{b}\times\left(1-\frac{a'}{a}\right)\times\left(1-\frac{c'}{c'}\right)$; dans ce cas il jouira de la totalité de l'annuité. Et la somme de toutes ces valeurs, multipliée par $(1+p)^{-1}$, donnera

$$(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{b'}{b}-\frac{a'b'}{2ab}-\frac{b'c'}{2bc}+\frac{a'b'c'}{2abc}\right)$$

pour la valeur totale de l'espérance de B par rapport à la rente de la première année.

Par un raisonnement semblable, nous trouverons la valeur de son espérance pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de tous ces termes sera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, et sera évidemment trouvée égale à $B - \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} ABC$. D'où la règle suivante :

97. De la valeur d'une annuité sur la tête B, retranchez la moitié de la somme des valeurs d'une annuité sur les deux groupes AB et BC; ajoutez au reste la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe ABC; la somme sera la part pour laquelle B doit contribuer à l'achat.

98. Reste maintenant à déterminer la part de C, dont l'espérance, par rapport à une année quelconque, peut être considérée de deux manières. 1°. B et C peuvent être vivans et A mort, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{b'c'}{bc} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right)$; dans ce cas il recevra la moitié de l'annuité. 2°. C peut être le seul vivant, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{c'}{c} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right) \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right)$; dans ce cas il recevra la totalité de l'annuité. Et la somme de ces deux valeurs, multipliée par $(1 + \rho)^{-1}$, donnera

$$(1 + \rho)^{-1} \times \left(\frac{c'}{c} - \frac{a'c'}{ac} - \frac{b'c'}{2bc} + \frac{a'b'c'}{2abc}\right)$$

pour la valeur totale de l'espérance de C par rapport à la rente de la première année.

Par un raisonnement semblable, on trouvera la valeur de son espérance pour toutes les années suivantes jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de tous ces termes exprimera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, et sera évidemment trouvée égale à $C - AC - \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} ABC$. D'où la règle suivante.

99. De la valeur d'une annuité sur la tête C, retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe AC, et la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe BC; ajoutez au reste la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe ABC. La somme sera la part pour laquelle C doit contribuer à l'achat.

100. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans; que le taux de l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton. La part de chaque personne dans cette annuité sera: celle de

$$A = 16,033 - \frac{1}{2} \times 11,873 = 10,09[illegible]$$

$$B = 14,781 - \frac{1}{2} \times (11,873 + 10,490) + \frac{1}{2} \times 8,986 = 8,09[illegible]$$

$$C = 13,197 - 10,924 - \frac{1}{2} \times 10,490 + \frac{1}{2} \times 8,986 = 1,52[illegible]$$

Et la somme de ces trois valeurs est la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès des têtes proposées.

PROBLÈME XI.

101. A, B et C conviennent d'acheter une annuité payable jusqu'à leur dernier décès, annuité qui doit être partagée entre eux de la manière suivante. A jouira de la totalité de l'annuité jusqu'à son décès; mais à son décès elle sera également partagée entre B et C pendant leur existence simultanée, pour appartenir enfin en totalité au survivant. Trouver leurs parts respectives.

SOLUTION.

L'intérêt de A dans cette annuité, ou la part pour laquelle il doit contribuer à l'achat, est évidemment égale à la valeur d'une annuité reposant sur sa tête, c'est-à-dire égale à $\acute{A}$.

102. Quant à la part de B, son espérance par rapport à une année quelconque peut être considérée de deux manières. 1° B et C peuvent être vivans et A mort, événement dont la probabilité à la fin de la première année est $\frac{b'c'}{bc} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right)$; dans ce cas il recevra la moitié de l'annuité. 2° B peut être le seul vivant, événement dont la probabilité à la fin de la première année est $\frac{b'}{b} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right) \times \left(1 - \frac{c'}{c}\right)$; dans ce cas il recevra la totalité de l'annuité. Et la somme de ces deux valeurs, multipliée par $(1+\rho)^{-1}$, donnera $(1+\rho)^{-1} \times \left(\frac{b'}{b} - \frac{a'b'}{ab} - \frac{b'c'}{2bc} + \frac{a'b'c'}{2abc}\right)$ pour la valeur totale de l'espérance de B par rapport à la rente de la première année.

En raisonnant de la même manière nous trouverons la valeur de son espérance pour toutes les années suivantes jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de tous ces termes sera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, et sera trouvée égale à $B—AB—\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}ABC$: d'où la règle suivante

103. De la valeur d'une annuité sur la tête B, retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe AB, et la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe BC; ajoutez au reste la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe ABC; la somme sera la part pour laquelle B doit contribuer à l'achat.

104. Quant à la part de C, il est évident que son espérance par rapport à une année quelconque dépend des mêmes événemens, *mutatis mutandis*, que celle de B. Nous trouverons donc par un raisonnement semblable que la valeur de son intérêt dans l'annuité sera égale à $C—AC—\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}ABC$: d'où la règle suivante.

105. De la valeur d'une annuité sur la tête C, retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe AC, et la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe BC; ajoutez au reste la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe ABC: la somme sera la part pour laquelle C doit contribuer à l'achat. (1)

---

(1) On voit que l'intérêt de C, dans cette annuité, est le même que dans le problème précédent.

106. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans; que le taux de l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton. La part de chaque personne dans cette annuité sera : celle de

$A = 16,033 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 16,033$

$B = 14,781 - 11,873 - \frac{1}{2} \times 10,490 + \frac{1}{2} \times 8,986 = 2,156$

$C = 13,197 - 10,924 - \frac{1}{2} \times 10,490 + \frac{1}{2} \times 8,986 = 1,521$

et la somme de ces trois valeurs est la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès des trois têtes.

PROBLÈME XII.

107. A, B et C conviennent d'acheter une annuité payable jusqu'à leur dernier décès, annuité dont ils doivent successivement posséder la totalité; c'est-à-dire que A en jouira toute sa vie; après son décès, B en héritera, et C enfin la possèdera jusqu'à son décès. Trouver leurs parts respectives.

SOLUTION.

La valeur de l'intérêt de A dans cette annuité, ou la part pour laquelle il doit contribuer à l'achat, est évidemment égale à la valeur d'une annuité reposant sur sa tête; c'est-à-dire égale à *A*.

108. La valeur de l'intérêt de B, ou la part pour laquelle il doit contribuer à l'achat, est égale à la valeur d'une annuité en reversion sur sa tête, après

le décès de A : c'est-à-dire (d'après le scolie du nº 76) égale à $B-AB$.

109. La valeur de l'intérêt de C, ou la part pour laquelle il doit contribuer à l'achat, est égale à la valeur d'une annuité en reversion sur sa tête après l'extinction des deux têtes A et B, c'est-à-dire (d'après le même scolie) égale à $C-AC-BC+ABC$.

110. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans, que le taux de l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton. La part de chaque personne dans cette annuité sera : celle de

A= 16,033........................... =16,033
B=14,781 — 11,873.................. = 2,908
C=13,197—(10,924+10,490)+8,986 = 0,769

Et la somme de ces trois valeurs sera la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès des trois têtes.

Corollaire.

111. S'il ne s'agissait que de deux têtes, A et B, les valeurs de leurs parts respectives seraient précisément les mêmes que celles ci-dessus.

PROBLÈME XIII.

112. A, B et C conviennent d'acheter une annuité reposant sur l'existence de deux quelconques d'entre eux, et qui doit être également partagée entre eux tant qu'ils vivront ; mais au décès de l'un d'eux

ra également partagée entre les deux survivans nt leur existence simultanée. Trouver la valeur rs parts respectives.

SOLUTION.

spérance de A, par rapport à la rente d'une quelconque, peut être considérée de trois ma- s. 1° A, B et C peuvent être tous vivans : dans il recevra le tiers de l'annuité. 2° A et B peu- être vivans et C mort; dans ce cas il recevra la ié de l'annuité. 3° A et C peuvent être vivans et rt; dans ce cas il recevra aussi la moitié de l'an- . Donc la somme de ces espérances pour les ière, seconde, troisième, etc., années, jusqu'aux ières limites de la vie humaine, sera la valeur e de la part de A dans cette annuité. Mais la va- de ces diverses espérances a déjà été trouvée la solution du problème VIII; puisqu'elles sont pré- nent les mêmes que les trois premières dont traite roblème; et leur somme, pour toutes les années a vie humaine, sera trouvée égale à $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC$ ABC.

13. Quant à la part de B ou C, leur espérance rapport à la rente d'une année quelconque dé- d des mêmes événemens *mutatis mutandis*, que de A : d'où il suit qu'en faisant les substitutions essaires à l'expression générale ci-dessus, nous ons $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC-\frac{2}{3}ABC$, pour la valeur de térêt de B, et $\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC-\frac{2}{3}ABC$ pour la va- r de l'intérêt de C dans l'annuité proposée; d'où

la règle suivante pour déterminer la part de l'une quelconque des trois têtes données.

114. Retranchez les deux tiers de la valeur d'une annuité sur le groupe des trois têtes, de la demi-somme des valeurs d'une annuité sur les deux groupes de têtes provenant de la combinaison de la tête proposée avec chacune des deux autres ; le reste sera la part pour laquelle cette tête doit contribuer à l'achat.

115. Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans ; que l'intérêt soit de 4 p. 100, et la mortalité conforme aux observations de Northampton. La part de chaque personne dans cette annuité sera :

celle de $A = \frac{1}{2}(11{,}873 + 10{,}924) - \frac{2}{3} \times 8{,}986 = 5{,}408$

$B = \frac{1}{2}(11{,}873 + 10{,}490) - \frac{2}{3} \times 8{,}986 = 5{,}191$

$C = \frac{1}{2}(10{,}924 + 10{,}490) - \frac{2}{3} \times 8{,}986 = 4{,}716$

Et la somme de ces trois valeurs, où 15,315 est la valeur d'une annuité reposant sur l'existence de deux quelconques des trois têtes données.

PROBLÈME XIV.

116. A, B et C conviennent d'acheter une annuité reposant sur l'existence de deux quelconques d'entre eux, et qui doit être partagée entre eux de la manière suivante : A et B en jouiront en portions égales durant leur existence simultanée, mais à la mort de

l'un deux, elle sera également partagée entre les deux survivans pendant leur existence simultanée; trouver leurs parts respectives.

SOLUTION.

L'espérance de A par rapport à la rente d'une année quelconque peut être considérée de deux manières. 1° A et B peuvent vivre tous deux; dans ce cas il recevra la moitié de l'annuité. 2° A et C peuvent être vivans et B mort; dans ce cas il recevra aussi la moitié de l'annuité. Donc la somme de ces espérances pour les première, seconde, troisième, etc., années jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, sera la valeur totale de la part de A dans l'annuité. Mais la valeur de ces diverses espérances a déjà été trouvée dans la solution du prob. IX, puisqu'elles sont précisément les mêmes que les deux premières dont traite ce problème; et leur somme, pour toutes les années de la vie humaine, sera trouvée égale à $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}ABC$: d'où la règle suivante :

117. Retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe ABC, de la somme des valeurs d'une annuité sur chacun des deux groupes AB et AC : la moitié du reste sera la part pour laquelle A doit contribuer à l'achat.

118. Quant à la part de B, il est évident que son espérance par rapport à la rente d'une année quelconque dépend des mêmes événemens, *mutatis mutandis*, que celle de A : donc en faisant

les substitutions nécessaires à l'expression générale ci-dessus, nous aurons $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}ABC$ pour la valeur de l'intérêt de B dans l'annuité; d'où la règle suivante :

119. Retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe ABC de la somme des valeurs d'une annuité sur chacun des deux goupes AB et BC; la moitié du reste sera la part pour laquelle B doit contribuer à l'achat.

120. Mais quant à la part de C, on verra que son espérance par rapport à la rente d'une année quelconque, peut être considérée de deux manières, 1°. A et C peuvent être vivans et B mort; dans ce cas, il recevra la moitié de l'annuité; 2°. B et C peuvent être vivans et A mort; dans ce cas aussi il recevra la moitié de l'annuité. Donc la somme de ces deux espérances, pour les première, seconde, troisième, etc. années, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, sera la valeur totale de l'intérêt de C dans l'annuité. Mais la valeur de ces espérances a déjà été trouvée dans la solution du problème IX, puisqu'elles sont précisément les mêmes que les deux premières dont traite ce problème à l'article de part de C; et leur somme, pour toutes les années de la vie humaine, sera trouvée égale à $\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC - ABC$: d'où la règle suivante :

121. Retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe ABC de la demi-somme des valeurs d'une

annuité sur les deux groupes AC et BC ; le reste sera la part pour laquelle C doit contribuer à l'achat.

122. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans, que le taux de l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton, la part de chaque personne dans l'annuité sera :

celle de $A = \frac{1}{2}(11,873 + 10,924 - 8,986) = 6,905$,

$B = \frac{1}{2}(11,873 + 10,490 - 8,986) = 6,689$,

$C = \frac{1}{2}(10,924 + 10,490) - 8,986 = 1,721$,

et la somme de ces trois valeurs est la valeur totale d'une annuité reposant sur l'existence de deux quelconque des trois têtes proposées.

PROBLÈME XV.

123. A, B et C conviennent d'acheter une annuité reposant sur l'existence de deux quelconques d'entre eux, et qui sera partagée entre eux de la manière suivante : A et B doivent en jouir par portions égales durant leur existence simultanée ; si A meurt le premier, B et C en jouiront par portions égales durant leur existence simultanée ; mais si B meurt le premier, A en possédera la totalité pendant l'existence simultanée de A et de C : trouver leurs parts respectives.

SOLUTION.

L'espérance de A par rapport à la rente d'une année quelconque peut être considérée de deux ma-

nières, 1°. A et B peuvent être tous deux vivans, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{a'b'}{ab}$; dans ce cas, il recevra la moitié de l'annuité; 2°. A et C peuvent être vivans et B mort, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{a'c'}{ac} \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right)$; dans ce cas il recevra la totalité de l'annuité. La somme de ces deux valeurs, multipliée par $(1+\rho)^{-1}$, donnera $(1+\rho)^{-1}\left(\frac{a'b'}{2ab} + \frac{a'c'}{ac} + \frac{a'b'c'}{abc}\right)$ pour la valeur totale de l'espérance de A par rapport à la rente de la première année.

Par un raisonnement semblable, nous trouverons la valeur de son espérance pour les seconde, troisième, etc. années jusqu'aux dernières limites de la vie humaine : la somme de tous ces termes sera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, et sera trouvée égale à $\frac{1}{2}AB + AC - \frac{1}{2}ABC$; d'où la règle suivante :

124. Ajoutez la moitié de la valeur d'une annuité sur le groupe AB à la valeur d'une annuité sur le groupe AC; retranchez du reste la valeur d'une annuité sur le groupe ABC; le reste sera la valeur de la part de A.

125. L'espérance de B par rapport à la rente d'une année quelconque peut être considérée de deux manières, 1°. A et B peuvent être tous deux vivans, événement dont la probabilité, à la fin de la pre-

mière année, est $\frac{a'b'}{ab}$; dans ce cas, il recevra la moitié de l'annuité; 2°. B et C peuvent être vivans et A mort, événement dont la probabilité, à la fin de la première année, est $\frac{b'c'}{bc} \times \left(1 - \frac{a'}{a}\right)$; dans ce cas, il recevra également la moitié de l'annuité. Donc la somme de ces deux valeurs, multipliée par $(1+\rho)^{-1}$, donnera $(1+\rho)^{-1} \times \left(\frac{a'b'}{2ab} + \frac{b'c'}{2bc} - \frac{a'b'c'}{2abc}\right)$ pour l'espérance de B par rapport à la rente de la première année.

On trouvera de la même manière la valeur de son espérance pour toutes les années suivantes de la vie humaine; la somme de tous ces termes sera la valeur totale de son intérêt dans l'annuité, et sera trouvée égale à $\frac{1}{2}(AB + BC - ABC)$: d'où la règle suivante :

126. Retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe ABC de la somme des valeurs d'une annuité sur les deux groupes AB et BC ; la moitié du reste sera la valeur de la part de B.

127. Quant à la part de C, on voit qu'elle n'est autre chose que la moitié de la valeur d'une annuité en reversion sur le groupe BC, après l'extinction de A ; cette annuité en reversion a été trouvée égale à $\frac{1}{2}(BC - ABC)$, d'après le scolie du n° 76; d'où la règle suivante :

128. Retranchez la valeur d'une annuité sur le groupe ABC, de la valeur d'une annuité sur le

groupe BC ; la moitié du reste sera la valeur de la part de C.

129. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans ; que l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton. La part de chaque personne dans l'annuité sera :

$$\text{celle de A} = \tfrac{1}{2} \times 11,873 + 10,924 - 8,986 = 7,874,$$

$$\text{B} = \tfrac{1}{2} \times (11,873 + 10,490 - 8,986) = 6,689,$$

$$\text{C} = \tfrac{1}{2} \times (10,490 + 8,986) \qquad = 0,752,$$

et la somme de ces trois valeurs sera le prix total de l'annuité proposée.

PROBLÈME XVI.

130. D, ou ses héritiers, aussitôt que deux quelconques de trois têtes données A, B, C, viendront à s'éteindre, doit entrer en jouissance d'une annuité qui reposera sur l'existence du survivant; trouver la valeur de son intérêt dans l'annuité.

SOLUTION.

L'annuité est évidemment payable jusqu'au dernier décès des trois têtes proposées; et sa valeur s'il n'y avait aucune condition restrictive, serait d'après le problème II, égale à $A+B+C-A$ $-AC-BC+ABC$; mais puisque D, ou s

héritiers, ne doit rien recevoir durant l'existence simultanée de deux quelconques de ces têtes, on devra retrancher de l'expression précédente la valeur d'une annuité reposant sur cette existence simultanée de deux têtes, c'est-à-dire, d'après le problème III, $AB + AC + BC - 2ABC$. Donc, $A + B + C - 2AB - 2AC - 2BC + 3ABC$ sera la valeur demandée; d'où la règle suivante :

131. De la somme des valeurs d'une annuité sur chacune des têtes, considérée isolément, retranchez deux fois la somme des valeurs d'une annuité sur chaque groupe de deux têtes; ajoutez au reste trois fois la valeur d'une annuité sur le groupe des trois têtes : la somme sera l'intérêt de D dans cette annuité, ou la valeur de la reversion demandée.

132. *Exemple.* Une propriété repose sur trois têtes âgées de 20, 30 et 40 ans; et aussitôt l'extinction de deux d'entre elles, D, ou ses héritiers, en touchera les revenus jusqu'à l'extinction de la troisième tête; trouver l'intérêt de D dans cette annuité, la mortalité étant conforme aux tables de Northampton, et le taux de l'intérêt étant de 4 p. 100.

La somme des valeurs d'une annuité sur chacune des trois têtes, est $16{,}033 + 14{,}781 + 13{,}197 = 44{,}011$; la somme des valeurs d'une annuité sur chaque groupe de deux têtes, est $11{,}873 + 10{,}924 + 10{,}490 = 33{,}287$, et la valeur d'une annuité sur le groupe des trois têtes est, 8986. Donc $44{,}011 - 2 \times 33{,}287 + 3 \times 8{,}986 = 4{,}395$ sera la valeur demandée.

PROBLÈME XVII.

133. D, ou ses héritiers, aussitôt qu'une quelconque de trois têtes données A, B, C, viendra à s'éteindre, doit entrer en jouissance d'une annuité e en jouir jusqu'au dernier décès des deux têtes survivantes. Trouver la valeur de son intérêt dan l'annuité.

SOLUTION.

Il est évident, dans ce cas aussi, que l'annuité es payable jusqu'au dernier décès des trois têtes proposée et telle en serait la valeur par rapport à D, ou à se héritiers, s'il devait en jouir immédiatement. Ma comme il ne doit rien recevoir avant la dissolutio du groupe des trois têtes, on devra retrancher l valeur d'une annuité reposant sur ce groupe, de l valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier dé cès des trois mêmes têtes, afin d'obtenir la valeu demandée. Donc $A+B+C-AB-AC-BC$ $+ABC-ABC=A+B+C-AB-AC-BC$ sera la valeur de son intérêt dans l'annuité; d'où l règle suivante :

134. De la somme des valeurs d'une annuité su chaque tête isolée, retranchez la somme des valeur d'une annuité sur chaque groupe de deux têtes, l reste sera la valeur de l'intérêt de D dans l'annuité ou la reversion demandée.

135. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soien âgées de 20, 30 et 40 ans, que l'intérêt soit d

4 p. 100 et la mortalité conforme aux observations de Northampton. Dans ce cas la valeur demandée sera 16,033 + 14,781 + 13,197 — (11,873 + 10,924 + 10,490) = 10,724.

Corollaire.

136. S'il ne s'agissait que de deux têtes A et B, la valeur de l'intérêt de D dans l'annuité serait, d'après le même raisonnement, trouvée égale à $A + B - 2AB$; d'où la règle suivante :

137. De la somme des valeurs d'une annuité sur chaque tête isolée, retranchez la double valeur d'une annuité sur le groupe des deux têtes; le reste sera la valeur demandée.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, la question XXI du chapitre XII.

PROBLÈME XVIII.

138. D, ou ses héritiers, aussitôt que l'une des trois têtes A, B, C, viendra à s'éteindre, entrera en jouissance d'une annuité dont il jouira jusqu'au premier décès des deux survivans; trouver la valeur de son intérêt dans l'annuité.

SOLUTION.

Dans ce cas, l'annuité repose sur l'existence simultanée de deux quelconques des têtes proposées; et telle en serait la valeur par rapport à D, s'il devait entrer en jouissance immédiatement; mais comme il ne doit rien recevoir avant la dissolution du groupe

des trois têtes, on devra retrancher la valeur d'une annuité reposant sur ce groupe de la valeur d'une annuité reposant sur l'existence simultanée de deux quelconques des têtes proposées. Donc $AB + AC + BC - 2ABC - ABC = AB + AC + BC - 3ABC$ sera la valeur demandée : d'où la règle suivante :

139. De la somme des valeurs d'une annuité sur chaque groupe de deux têtes, retranchez trois fois la valeur d'une annuité sur le groupe des trois têtes; le reste sera la valeur demandée.

140. *Exemple.* Supposons que les trois têtes soient âgées de 20, 30 et 40 ans, que l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton. Dans ce cas la valeur demandée sera $11{,}873 + 10{,}924 + 10{,}490 - 3 \times 8{,}986 = 6{,}329$.

Scolie.

141. Les problèmes précédens contiennent plusieurs des questions de survivance les plus générales qui n'impliquent pas plus de trois têtes; je n'ignore pas qu'il peut s'en présenter beaucoup d'autres, puisque les conditions de ces problèmes admettent une variété infinie; mais j'ai pensé que si l'on étudie attentivement la méthode que nous avons suivie pour résoudre ceux que nous avons discutés, il ne sera plus difficile de répondre aux autres questions qui pourraient se présenter.

142. Je dois cependant ici faire observer que dans tous ces problèmes les résultats se rapportent à la

lurée entière de l'existence des têtes sur lesquelles epose l'annuité; mais si, d'après les conditions du problème, la chance qu'on a de recevoir l'annuité était *différée* ou *temporaire*, les résultats devraient aussi être affectés de la même manière. Nous devrions alors substituer les valeurs de semblables annuités, *différées* ou *temporaires*, aux valeurs des annuités pour toute la durée de l'existence, et opérer sur ces valeurs substituées comme nous l'avons fait sur les autres. (*Voyez* d'ailleurs, à ce sujet, les coroll. 2 et 4 du probl. II, et le coroll. 1 du scolie n° 76.)

CHAPITRE V.

DES ANNUITÉS EN REVERSION QUI DÉPENDENT D'UN ORDRE PARTICULIER DE SURVIVANCE.

143. Au nombre des questions d'annuités en re version qui n'embrassent pas plus de trois têtes, qui sont exposées dans le scolie du n° **76**, il s'e trouve deux qui impliquent souvent une circon tance à laquelle il est très difficile d'avoir égard d'u manière précise et exacte dans les formules algébr ques. Ce sont la seconde et la troisième de ces ques tions, et la circonstance dont nous parlons ici est q l'une des deux têtes en particulier, P ou Q, meu avant ou après l'autre.

Comme les raisonnemens qui conduisent à la so lution de ces deux questions seront d'une impo tance considérable dans la suite de cet ouvrag je consacrerai un chapitre entier à l'examen de sujet. La solution de ces problèmes eux-mêmes co duira à quelques autres questions sur les survivanc qui, devant être appuyées sur les premiers, n'ont trouver place dans le chapitre précédent.

144. Au lieu des têtes A, P, Q, dont je me s servi dans le scolie cité plus haut, prenons les tê A, B, C, et supposons que B et C soient les têtes

possession et A la tête en *reversion*. La valeur d'une annuité en reversion sur la tête A après le groupe BC est égale à $A - ABC$; mais si A ne doit jouir de l'annuité que si B meurt *le premier*, il est évident que cette restriction réduira considérablement la valeur de l'annuité.

Quand les deux têtes en possession ont le même âge, ou à peu de chose près, il y a chance *égale* pour chacune d'elles de mourir avant ou après l'autre; mais comme il n'en est pas toujours ainsi, il serait extrêmement à désirer que l'on pût obtenir une expression propre à l'usage général qui donnât cette probabilité pour *chaque* année de la vie humaine, puisque l'espérance qu'on a de recevoir la rente de *chaque* année dépend de cette probabilité. Malheureusement elle ne peut être représentée par une quantité *constante* qu'après l'extinction de la plus âgée des deux têtes; car la chance de survivance varie d'année en année jusqu'à cette époque : et même alors nous ne pouvons en trouver la valeur que par approximation. Quand la différence d'âge des têtes en possession n'est pas grande, on ne commettra pas une erreur sensible, comme je l'ai observé tout à l'heure, en supposant qu'il y ait chance égale pour chacune des deux têtes de mourir avant ou après l'autre, pendant la durée *possible* (1) de leur existence

---

(1) On doit entendre par durée *possible*, *la plus grande* durée possible de l'existence des têtes proposées. Quand il s'agit d'une tête seule, cette durée est le nombre d'années compris entre son âge et la limite de la table d'observations.

simultanée; mais quand cette différence est considérable, on ne saurait opérer ainsi sans inexactitude. Passé ce terme, cependant, la chance demandée peut, dans tous les cas, être appréciée d'une manière assez correcte. Mais avant de discuter les problèmes qui résultent de cette question, il sera nécessaire d'exposer les deux lemmes suivans.

LEMME I.

145. Déterminer la probabilité que de deux têtes données A et B, l'une en particulier A, a de mourir *avant* l'autre.

SOLUTION.

Il est évident que cette circonstance peut se réaliser dans une année quelconque, 1°. ou par la mort de A dans cette année, B n'ayant pas cessé d'exister, 2°. ou par l'extinction des deux têtes dans cette année, A étant mort le premier. La probabilité du premier événement est, pour la première année, d'après les nos 24 et 25, $\frac{a-a'}{a} \times \frac{b'}{b}$; et la probabilité du second

---

Quand il s'agit d'un groupe de têtes ou de l'existence simultanée ou du premier décès de plusieurs têtes (toutes ces expressions ont la même signification), cette durée *possible* est le nombre d'années compris entre l'âge de la plus vieille des têtes proposées et la limite de la table d'observations; enfin, quand il s'agit du dernier décès de plusieurs têtes, cette durée *possible* est le nombre d'années compris entre l'âge de la plus jeune des têtes proposées et la limite des tables. (*Note du traducteur.*)

événement est, pour le même laps de temps, $\frac{(a-a')}{a} \times \frac{(b-b')}{b} \times \frac{1}{2}$ (1) : la somme de ces deux valeurs ou $\frac{(a-a') \times (b+b')}{2ab}$ sera la valeur totale de la proba-

---

(1) Dans le calcul de toutes ces probabilités annuelles, j'ai supposé que la chance que A a de mourir avant B soit toujours égale à $\frac{1}{2}$, quelle que soit la différence d'âge ; cette supposition ne devient vraiment exacte que quand les deux têtes ont le même âge ; mais comme dans la discussion qui nous occupe je n'ai tenu compte de cette chance que pour chaque année isolée, et que d'ailleurs, dans la pratique, les autres quantités avec lesquelles elle se combine corrigent une grande partie de l'erreur qui résulte de cette supposition, il serait inutile de rendre la solution plus compliquée et plus difficile pour obtenir un plus grand degré d'exactitude. On verra cependant, d'après cette remarque, que le résultat obtenu ne donne la valeur demandée que par approximation ; mais il approche de plus en plus de la véritable valeur à mesure que l'on continue la série.

Quand A est la plus jeune des deux têtes, la fraction $\frac{1}{2}$ *excède* la chance que A a de mourir avant B, et par conséquent, la valeur de ψ, trouvée au moyen du lemme, *excédera* la vraie valeur de la probabilité que A a de mourir avant B, dans une période quelconque de leur existence simultanée. D'un autre côté, quand A est la plus vieille des deux têtes, la chance que A a de mourir avant B est supérieure à $\frac{1}{2}$, et par conséquent ψ sera dans ce cas moindre que la vraie valeur de la probabilité que A a de mourir avant B, dans le même laps de temps. On pourra d'ailleurs, dans les cas particuliers qu'on aura à résoudre, prendre en considération la différence d'âge des têtes proposées, quand elle se trouvera trop sensible.

proposées, comme nous l'avons fait pour trouver la valeur numérique des annuités (*voyez* prob. I, cor. 2). Cette méthode abrége considérablement l'opération nécessaire pour trouver la probabilité de survivance entre deux autres têtes, dont les âges auraient la même différence que ceux des têtes proposées; car les derniers termes de la série seront les mêmes dans les deux cas.

147. *Exemple.* Soit proposé de trouver la probabilité que la tête A a de mourir avant la tête B, plus âgée de 10 ans; en se servant des tables générales de Suède. Le tableau suivant indiquera l'opération à faire pour trouver ces valeurs pour des âges quelconques.

Age de A.	Age de B.	PROBABILITÉ DE PRÉDÉCÈS DE LA TÊTE A.
86	96	$\frac{1}{2 \times 144} \times 35 = 0,$[illegible]
85	95	$\frac{1}{2 \times 2 \times 189} \times [45 \times (2+1)+35] = 0,$[illegible]
84	94	$\frac{1}{2 \times 5 \times 244} \times [55 \times (5+2)+45 \times (2+1)+35] = 0,$[illegible]
83	93	$\frac{1}{2 \times 11 \times 309} \times [65 \times (11+5)+55 \times (5+2)+45 \times (2+1)+35] = 0,$[illegible]
82	92	$\frac{1}{2 \times 21 \times 384} \times [75 \times (21+11)+65 \times (11+5)+55 \times (5+2)+\text{etc.}] = 0,$[illegible]
81	91	$\frac{1}{2 \times 33 \times 46\ldots} \times [84 \times (33+21)+75 \times (21+11)+65 \times (11+5)+\text{etc.}] = 0,$[illegible]
80	90	$\frac{1}{2 \times 47 \times 558} \times [90 \times (47+33)+84 \times (33+21)+75 \times (21+11)+\text{etc.}] = 0,$[illegible]
etc.	etc.	etc. etc. etc. etc.

On voit d'après ces exemples que la probabilité 'une tête de 80 ans a mourir avant une autre tête ée de 90 ans, est exprimé par la fraction 0,2999, *certitude* étant prise pour unité, et si les deux têtes aient 82 et 92 ans, la probabilité serait exprimée ır 0,2477. On verra aussi en examinant la série de rmes qui correspond à chaque année, qu'elle n'est 'esque composée que des termes de la série précé-ente, et par conséquent, qu'il est à peine plus long e calculer la probabilité de survivance entre des tes de plusieurs différens âges, pourvu que la diffé-ence d'âge reste la même, que de les calculer seule-ient pour les deux plus jeunes de ces têtes.

148. L'exemple ci-dessus indique la probabilité e survivance entre deux têtes, d'après les observa-ions *générales* faites en Suède, sans distinction de exe; mais si une des personnes est désignée comme u sexe masculin et l'autre comme du sexe féminin, es résultats différeront sensiblement, comme on le oit dans les deux tableaux suivans, où la réponse arie suivant que la plus âgée des deux têtes proposées st celle de l'homme ou celle de la femme.

Age de A, homme.	Age de B, femme,	Probabilité pour que A meure le premier.
87	97	0,1209
86	96	0,1956
85	95	0,2405
84	94	0,2811
83	93	0,3147
82	92	0,3342
81	91	0,3478
80	90	0,3534

Age de A, femme.	Age de B, homme.	Probabilité pour que A meure la première.
87	97	0,0000
86	96	0,0000
85	95	0,1228
84	94	0,1798
83	93	0,2045
82	92	0,2437
81	91	0,2678
80	90	0,2797

On pourrait dresser deux autres tableaux semblables pour les mêmes âges, et répondant au cas où les têtes proposées seraient toutes deux du sexe masculin, ou toutes deux du sexe féminin. Mais j'en ai dit assez pour que le lecteur puisse calculer la probabilité de survivance pour une question quelconque.

Corollaire 1.

149. Si l'on retranche la somme d'un nombre quelconque de termes de la série, de la probabilité que le groupe des deux têtes a de se dissoudre dans l'espace représenté par ce nombre de termes, le reste sera la probabilité que B a de mourir avant A dans ce laps de temps. Conséquemment, puisqu'il est *certain* que l'une de ces têtes mourra avant la fin de la $n^{ième}$ année, si l'on retranche de l'unité la somme de tous

les termes de la série, le reste, ou, $1 - \psi$, sera la chance totale que B a de mourir avant A jusqu'au terme nécessaire de leur existence simultanée.

Corollaire 2.

150. Quand les deux têtes sont du même âge, la somme des termes de la série générale du problème est égale à $\frac{1}{2}$; c'est-à-dire que $\psi = \frac{1}{2}$.

Scolie.

151. Puisque A et B peuvent représenter des têtes de tous les âges, et que par conséquent la série donnée dans le problème, embrasse toutes les questions, ψ est par là même l'expression générale de la probabilité de survivance entre deux têtes quelconques; cependant comme le même problème pourrait impliquer plusieurs probabilités de cette nature, et que l'emploi du même caractère pour représenter des quantités différentes occasionerait beaucoup de confusion, je désignerai par les caractères suivans les probabilités de survivance qui peuvent se rencontrer entre deux quelconques des trois têtes A, B, C.

La probabilité que A a de mourir *avant* B $= \psi$
A C $= \varpi$
B C $= \phi$.

D'où il suit, d'après le corollaire 1, que

la probabilité que B a de mourir *avant* A $= 1 - \psi$
C A $= 1 - \varpi$
C B $= 1 - \phi$.

LEMME II.

152. Déterminer la probabilité que de deux têtes, données A et B, l'une en particulier A, a de mourir *après* l'autre.

SOLUTION.

Il est évident que cette circonstance ne peut se réaliser la première année que par l'extinction des deux têtes, A mourant le dernier; la probabilité de cet événement est $\frac{a-a'}{a} \times \frac{b-b'}{b} \times \frac{1}{2}$ (1); expression que pour des raisons que j'exposerai plus tard, je ferai égale à $\frac{a-a'}{a} - \frac{(a-a')(b+b')}{2ab}$.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la circonstance proposée peut s'accomplir 1° par l'extinction des deux têtes dans le courant de l'année, A mourant le dernier; 2° par le décès de A dans l'année, B étant mort dans une des années précédentes. La probabilité du premier de ces événemens pour la seconde année est $\frac{(a'-a'')(b'-b'')}{2ab}$, et la probabilité du second est $\frac{(a'-a'')}{a} \times \left(1 - \frac{b'}{b}\right)$; donc la somme de ces deux expressions ou $\frac{a'-a''}{a} - \frac{(a'-a'')(b'+b'')}{2ab}$ désignera la probabilité totale que A a de mourir après B dans la seconde année; et cette expression ajoutée à celle que nous venons de trouver pour la

(1) *Voyez* la note de la page 92.

première année, donnera

$$\frac{a-a'}{a}-\frac{(a-a')\,(b+b')}{2ab}+\frac{a'-a''}{a}-\frac{(a'-a'')\,(b'+b'')}{2ab}$$

pour la probabilité que A a de mourir après B dans l'espace de deux années.

De la même manière, la probabilité du premier événement pour la troisième année est $\frac{(a''-a''')\,(b''-b''')}{2ab}$, et la probabilité du second $\frac{a''-a'''}{a}\times\left(1-\frac{b''}{b}\right)$; la somme de ces deux expressions, ou

$$\frac{a''-a'''}{a}-\frac{(a''-a''')\,(b''+b''')}{2ab}$$

désignera la probabilité totale que A a de mourir après B dans la troisième année; et cette expression, ajoutée à la valeur que nous venons de trouver pour deux ans, donnera $\frac{a-a'}{a}-\frac{(a-a')\,(b+b')}{2ab}+\frac{a'-a''}{a}$ $-\frac{(a'-a'')\,(b'+b'')}{2ab}+\frac{a''-a'''}{a}-\frac{(a''-a''')\,(b''+b''')}{2ab}$, pour la probabilité que A a de mourir après B dans l'espace de trois années. On raisonnera de même pour tous les années suivantes; et si nous appelons n la différence entre l'âge de la plus vieille des têtes proposées et la limite de la table d'observations, on trouvera que la série $\frac{a-a'}{a}+\frac{a'-a''}{a}+\frac{a''-a'''}{a}+\ldots$;

$$\frac{\alpha'-\alpha}{a}-\left[\frac{(a-a')\,(b+b')}{2ab}+\frac{(a'-a'')\,(b'+b'')}{2ab}\right.$$
$$\left.+\frac{(a''-a''')\,(b''+b''')}{2ab}+\ldots\frac{(\alpha,-\alpha)\,(\beta,+\beta)}{2ab}\right]$$

exprime la chance totale que A a de mourir après B durant cette période; c'est-à-dire jusqu'au terme nécessaire de leur existence simultanée.

Mais la première partie de cette série, ou

$$\frac{a-a'}{a}+\frac{a'-a''}{a}+\frac{a''-a'''}{a}+\ldots\frac{a-\alpha}{\alpha}$$

est évidemment égale à $\frac{a-\alpha}{a}=1-\frac{\alpha}{a}$; c'est-à-dire égale à la probabilité que la tête A a de mourir dans cette période; et la dernière partie de la série, est d'après le lemme précédent, égale à ψ; donc la valeur demandée pour n années sera représentée par $\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)-\psi$.

Corollaire.

153. Si l'on retranche la somme d'un nombre quelconque de termes de la série ci-dessus, de la probabilité que les deux têtes ont de s'éteindre dans l'espace représenté par ce nombre de termes, le reste sera la probabilité que B a de mourir après A dans ce laps de temps. Conséquemment si l'on retranche la somme de la série entière, de la probabilité que les deux têtes ont de se s'éteindre en n années, ou de $\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)\times\left(1-\frac{\beta}{b}\right)=1-\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}$ (1), le reste ou $\left(1-\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)-\left(1-\frac{\alpha}{a}-\psi\right)=\psi-\frac{\beta}{b}$ exprime

(1) Puisqu'il est *certain* que l'une ou l'autre des têtes sera éteinte à la fin de n années, il s'ensuit que la quantité $\frac{\alpha\beta}{ab}$ qui résulterait de ce produit, s'annulera dans tous les cas.

mera la chance que B a de mourir après A dans cette période.

Corollaire.

154. Quand les deux têtes sont du même âge, ψ devient $\frac{1}{2}$, comme nous l'avons dit au corollaire 2 du lemme précédent; conséquemment la somme des termes de la série qui nous occupe se trouvera aussi égale à $\frac{1}{2}$.

Scolie.

155. Afin d'éviter la confusion dont nous avons parlé dans le scolie de la page 98, je désignerai les diverses probabilités de survivance qui ont fait l'objet de ce lemme et qui peuvent se rencontrer entre deux quelconques de trois têtes A, B, C, par les caractères suivans :

La probabilité pour que A meure *après* B $= 1 - \psi - \frac{\alpha}{a}$

A C $= 1 - \varpi - \frac{\alpha}{a}$

B C $= 1 - \varphi - \frac{\beta}{b}$

D'où il suit, d'après le corollaire 1, que

la probabilité que B a de mourir *après* A $= \psi - \frac{\beta}{b}$

C A $= \varpi - \frac{\gamma}{c}$

C B $= \varphi - \frac{\gamma}{c}$

156. On devra remarquer ici que les expressions ci-dessus désignent les diverses probabilités de survivance pour *n* années seulement, ou jusqu'au terme nécessaire de l'existence simultanée des deux têtes, et ont été obtenues sans qu'on ait tenu compte d'un

âge plus avancé. Quand donc A est la plus âgée des deux têtes, l'expression générale du lemme devient égale à $1 - \psi$; parce que α devient 0, et que par conséquent la fraction $\frac{\alpha}{a}$ s'annulle. Mais quand A est la plus jeune des deux têtes, cette expression ne désignera plus la totalité de la probabilité que A a de mourir après B, puisque A peut ne mourir que postérieurement à la limite de l'existence de B. Pour déterminer cette probabilité à l'égard des années suivantes, on devra continuer la série du lemme jusqu'à la limite de l'existence de A, et on trouvera ainsi que les probabilités que A a de mourir après B en $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$.... années seront représentées respectivement par $1 - \psi - \frac{\alpha'}{a}$, $1 - \psi - \frac{\alpha''}{a}$, $1 - \psi - \frac{\alpha'''}{a}$, etc., jusqu'à la limite de l'existence de A, époque à laquelle l'expression devient $1 - \psi$.

De la même manière, quand B est la plus âgée des deux têtes, la probabilité que B a de mourir après A devient égale à ψ; mais si B est plus jeune que A, l'expression générale $\psi - \frac{\beta}{b}$ désignera la probabilité de cet événement pour n années seulement, ou jusqu'au terme nécessaire de l'existence simultanée des deux têtes. Et les probabilités du même événement pour $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$, etc., années seront représentées respectivement par $\psi - \frac{\beta'}{b}$, $\psi - \frac{\beta''}{b}$, $\psi - \frac{\beta'''}{b}$, etc., jusqu'à la limite de l'existence de B,

époque à laquelle l'expression devient égale à $\frac{1}{2}$. Les mêmes observations s'appliquent aux autres quantités données ci-dessus.

PROBLÈME XIX.

157. Trouver la valeur d'une annuité en reversion sur la tête A, après le dernier décès de deux têtes B et C, à condition que B meure *après* C.

SOLUTION.

La chance que A a de recevoir l'annuité à la fin d'une année quelconque, dépendra de la continuation de son existence à la fin de ce terme, et de l'extinction, avant ce même terme, des deux têtes B et C, mais avec la condition restrictive que B meure le dernier. C'est cette condition qu'il est très difficile de représenter d'une manière propre à l'usage général. Dans le court espace d'une année, comme je l'ai fait observer plus haut (note de la page 92), on ne commet pas une erreur sensible en prenant la *moitié* du produit des probabilités que les deux têtes ont de s'éteindre dans ce laps de temps; mais quand le nombre d'années et la différence entre les âges des deux têtes sont considérables, ces chances diffèrent dans la même proportion, et par conséquent, à moins que quelque autre circonstance en sens contraire ne diminue ou ne corrige l'erreur, le résultat qu'on obtient en supposant ainsi les chances égales, devient extrêmement inexact.

158. Si l'on représente par y', y'', y''', etc. les probabilités du décès de B après celui de C, en un,

deux, trois, etc. ans, trouvées par la méthode du lemme II, les espérances que A a de recevoir l'annuité à la fin de ces divers laps de temps, seront représentées avec un degré suffisant d'exactitude par $\frac{a'y'}{a(1+\varrho)}$, $\frac{a''y''}{a(1+\varrho)^2}$, $\frac{a'''y'''}{a(1+\varrho)}$, etc. Mais dans ce cas la vraie valeur de l'annuité ne pourrait être exprimée par moins de *n* séries différentes; et par conséquent cette méthode ne peut convenir à l'usage général.

159. On sait, d'après ce qui a été dit plus haut, que la probabilité qu'une tête a de mourir avant ou après une autre, diffère à chaque année de leur existence simultanée, et qu'on ne peut la représenter par une quantité constante qu'après l'extinction de la plus vieille des deux têtes. Mais après cette époque, l'espérance que A a de recevoir l'annuité à la fin d'une des années suivantes, peut être déterminée au moyen des lemmes précédens avec un degré suffisant d'exactitude.

Il ne resterait donc plus à trouver qu'une expression approximative qui indiquât la valeur de la probabilité que B a de mourir après C, pendant chacune des années de leur existence simultanée. Représentons par χ cette expression (dont la valeur sera plus loin le sujet de nos recherches : voyez n° **173**); alors la valeur de l'annuité en reversion, dépendant de la condition énoncée dans le problème, se déterminera de la manière suivante.

160. Il est évident que le paiement de l'annuité à la fin d'une année quelconque, dépend de la conti-

nuation de l'existence de A à la fin de cette année, et de l'extinction avant ce terme des deux têtes B et C, B étant mort le dernier; les probabilités de ces événemens pour les première, seconde, troisième, etc. années, sont respectivement désignées par......

$\frac{a'}{a}\left(1-\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{c'}{c}\right)\chi$, $\frac{a''}{a}\left(1-\frac{b''}{b}\right)\left(1-\frac{c''}{c}\right)\chi$, $\frac{a'''}{a}\left(1-\frac{b'''}{b}\right)\left(1-\frac{c'''}{c}\right)\chi$, etc. Par conséquent, la somme des espérances que l'on a de recevoir l'annuité à ces diverses époques, sera pour les n (1) premières années, représentée par la série suivante :

$$
\begin{aligned}
&(1+\rho)^{-1} \times \chi\left(\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'c'}{ac}+\frac{a'b'c'}{abc}\right)\\
+&(1+\rho)^{-2} \times \chi\left(\frac{a''}{a}-\frac{a''b''}{ab}-\frac{a''c''}{ac}+\frac{a''b''c''}{abc}\right)\\
+&(1+\rho)^{-3} \times \chi\left(\frac{a'''}{a}-\frac{a'''b'''}{ab}-\frac{a'''c'''}{ac}+\frac{a'''b'''c'''}{abc}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+&(1+\rho)^{-n} \times \chi\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha\beta}{ab}-\frac{\alpha\gamma}{ac}+\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right).
\end{aligned}
$$

161. Ier CAS. Soit A la plus vieille des trois têtes. Il est évident que dans ce cas la série ci-dessus exprimera la totalité de la valeur de l'annuité en reversion demandée; puisqu'à la $n^{ième}$ année la tête A s'éteint, et tous les termes suivans de la série s'évanouissent. Or la série ci-dessus est égale à

(1) J'observerai ici, une fois pour toutes, que dans ce problème et les suivans j'appellerai n le nombre d'années compris entre l'âge de la plus vieille des têtes proposées, et la limite de la table d'observations : par conséquent la valeur de n sera différente dans les trois cas qu'embrassent ces problèmes.

$\chi(A - AB - AC + ABC)$, c'est-à-dire égale à la valeur d'une annuité en reversion sur la tête A après le décès des deux têtes B et C, multipliée par la chance que B a de mourir après C.

162. IIᵉ CAS. Soit B la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la série ci-dessus désignera la valeur des n premières années de l'annuité en reversion, n désignant maintenant la différence entre l'âge de B et la limite de la table d'observations : et sa somme sera trouvée égale à $\chi(A' - AB - (AC)' + ABC)$. Car si l'on continue jusqu'à n termes seulement la première et la troisième colonne verticale de cette série, la somme de leurs termes sera, d'après le problème I, corollaire 4, représentée exactement par les caractères que je viens d'employer, et la deuxième et la quatrième colonne verticale désignent évidemment la totalité de la valeur d'une annuité reposant sur ces combinaisons respectives de têtes, puisque dans la $n^{ième}$ année la tête B s'éteint et tous les termes suivans s'évanouissent.

Maintenant, pour déterminer l'espérance qu'on a de recevoir les rentes des années de vie qui restent à la tête A, on devra observer que le paiement de l'annuité, une année quelconque, dépend de la continuation de l'existence de A à la fin de cette année, et de la probabilité que B a de mourir après C avant la fin de cette année. Mais la probabilité que B a de mourir après C, avant la fin de la $(n+1)^{me}$ année et de toutes les suivantes, est représentée (d'après le scolie du lemme II) par la quantité constante

$(1-\varphi)$ (1). Donc la somme des espérances que l'on a de recevoir les rentes des $(n+1)^{me}$, $(n+2)^{me}$, $(n+3)^{me}$, etc. années, sera représentée par la série $\frac{(1-\varphi)\alpha'}{a(1+\varrho)^{n+1}}+\frac{(1-\varphi)\alpha''}{a(1+\varrho)^{n+2}}+\frac{(1-\varphi)\alpha'''}{a(1+\varrho)^{n+3}}+$ etc., qui, continuée pour toutes les années suivantes de la vie de A, donnera la vraie valeur de toutes les rentes à recevoir après la $n^{ième}$ année. Or la somme de cette série est, d'après le problème I, corollaire 3, égale à $(1-\varphi)\times A^d$, expression qui, étant ajoutée aux n premiers termes des diverses colonnes verticales ci-dessus, donnera pour la valeur totale de l'annuité, dans ce cas $\chi\,[A^t-AB-(AC)^t+ABC]+(1-\varphi)\times A^d$. Mais puisque $A^t=A-A^d$, et que $(AC)^t=AC-(AC)^d$, comme on le voit d'après le problème I, corollaire 4, il s'ensuit que cette valeur sera plus convenablement exprimée par... $\chi(A-AB-AC+ABC)+(1-\varphi-\chi)\times A^d+\chi\times(AC)^d$.

163. IIIe CAS. Soit C la plus vieille des trois têtes. La valeur des rentes des n premières années (n désignant maintenant la différence entre l'âge de C et la limite de la table d'observations), sera dans ce cas, comme dans le précédent, représentée par les n termes de la série du problème, dont la somme

(1) Parce que dans l'expression générale, β devient égale à 0 quand B est la plus vieille des têtes proposées, et qu'en conséquence la fraction $\frac{\beta}{b}$ s'évanouit.

sera maintenant égale à $\chi[A'-(AB)-AC+ABC]$. Car si l'on continue jusqu'à n termes la première et la seconde colonnes verticales, la somme de ces termes sera exactement représentée par les caractères que je viens d'employer; mais les deux dernières colonnes verticales désignent évidemment la totalité de la valeur d'une annuité reposant sur ces combinaisons respectives de têtes, puisque la tête C s'éteint dans la $n^{ième}$ année.

Or, pour déterminer l'espérance qu'on a de recevoir les rentes des années de vie qui restent à A, on devra observer que les probabilités que B a de mourir après C, en $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$, etc. années, sont, d'après le scolie du lemme II, représentées respectivement par $\left(1-\varphi-\frac{\beta'}{b}\right)$, $\left(1-\varphi-\frac{\beta''}{b}\right)$, $\left(1-\varphi-\frac{\beta}{b}\right)$, etc.; donc, puisque le paiement de l'annuité dans une année quelconque dépend de la continuation de l'existence de A à la fin de cette année, et du décès de B après celui de C, avant cette même époque, il s'ensuit que si l'on multiplie respectivement ces valeurs par $\frac{a'}{a}$, $\frac{a''}{a}$, $\frac{a'''}{a}$, etc. [ou les probabilités que A a de vivre à la fin des $(n+1)^{me}$, $(n+2)^{me}$, $(n+3)^{me}$, etc. années], les produits seront les probabilités que l'on a de recevoir les rentes de ces années respectives. Et ces produits étant encore multipliés par la valeur actuelle de 1 fr. payable à la fin de ces années respectives, donneront les espérances qu'on a de recevoir les rentes de ces

années, et formeront la série suivante :

$$(1+\rho)^{-(n+1)} \times \left[(1-\varphi)\frac{a'}{a} - \frac{a'\beta'}{ab}\right]$$
$$+ (1+\rho)^{-(n+2)} \times \left[(1-\varphi)\frac{a''}{a} - \frac{a''\beta''}{ab}\right]$$
$$+ (1+\rho)^{-(n+3)} \times \left[(1-\varphi)\frac{a'''}{a} - \frac{a'''\beta'''}{ab}\right]$$
$$+ \text{ etc. } \quad \text{ etc. } \quad \text{ etc.}$$

Mais la somme de ces deux colonnes verticales, continuées jusqu'aux dernières limites de la vie de A, est, d'après le problème I, corollaire 3, égale à $(1-\varphi) \times A^d - (AB)^d$, expression qui, étant ajoutée aux n termes des diverses colonnes verticales trouvées plus haut, donnera pour la valeur totale de l'annuité, dans ce cas, $\chi[A'-(AB)'-AC+ABC]$ $+(1-\varphi) \times A^d - (AB)^d$, expression qui, d'après ce qui a été dit au cas précédent, peut être plus convenablement exprimée par $\chi(A-AB-AC+ABC)$ $+(1-\varphi-\chi) \times A^d - (1-\chi) \times (AB)^d$.

Corollaire.

164. Si les deux têtes en possession ont le même âge, celui de B, alors φ et χ deviennent tous deux égaux à $\frac{1}{2}$, et les quantités $(AB)^d$ et $(AC)^d$ s'évanouissent. Dans ce cas, l'expression devient dont $\frac{1}{2}(A-2AB+ABB)$ c'est-à-dire est égale à la moitié de la valeur d'une annuité en reversion sur la tête A, après le dernier décès de deux têtes égales B et B.

Et si les deux têtes en possession étaient du même âge que la tête A en reversion, l'expression deviendrait $\frac{1}{2}(A-2AA+AAA)$.

PROBLÈME XX.

165. Trouver la valeur d'une annuité en reversion sur la tête A, après la dissolution du groupe BC, à condition que B meure *avant* C.

SOLUTION.

Le paiement de l'annuité à la fin d'une année quelconque dépend de l'existence de A à la fin de cette année, et de l'extinction de B avant celle de C, antérieurement à la même époque. Comme cette dernière condition ne peut être représentée exactement pour toutes les années de la vie humaine, il devient nécessaire, comme dans le dernier problème, d'avoir recours à une expression approximative pour le nombre d'années que les têtes proposées ont la chance de subsister simultanément.

Soient donc les mêmes caractères que dans le dernier problème, et considérons le paiement de l'annuité pendant les n premières années, comme dépendant chaque année de l'un des deux événemens suivans, 1°. A peut subsister à la fin de l'année, et B et C être morts antérieurement, B étant mort le premier; 2°. B seulement peut être mort, et A et C subsister tous deux à la fin de l'année. La probabilité du premier événement est, pour la première année, $\frac{a'}{a}\left(1-\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{c'}{c}\right)(1-\chi)$(1), et la probabilité

(1) Puisque χ désigne la chance que B a de mourir *après* C pendant chaque année de leur existence simultanée, il s'ensuit que $1-\chi$ désigne la chance que B a de mourir *avant* C dans le même temps.

du second $\left(1-\frac{b'}{b}\right)\frac{a'c'}{ac}$; donc la somme de ces deux expressions, réduite à sa plus simple expression et multipliée par $(1+\rho)^{-1}$, donnera $(1+\rho)^{-1}$ $\times\left[\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{ab}-\left(\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'c'}{ac}-\frac{a'b'c'}{abc}\right)\chi\right]$ pour la valeur totale de l'espérance qu'on a de recevoir la rente de la première année. En raisonnant de la même manière, nous trouverons les espérances qu'on a de recevoir les rentes des années suivantes, et la somme de toutes ces espérances, pour les n premières années, sera représentée par la série suivante :

$$(1+\rho)^{-1}\left[\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{ab}-\left(\frac{a'}{a}-\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'c'}{ac}+\frac{a'b'c'}{abc}\right)\chi\right]$$
$$+(1+\rho)^{-2}\left[\frac{a''}{a}-\frac{a''b''}{ab}-\left(\frac{a''}{a}-\frac{a''b''}{ab}-\frac{a''c''}{ac}+\frac{a''b''c''}{abc}\right)\chi\right]$$
$$+(1+\rho)^{-3}\left[\frac{a'''}{a}-\frac{a'''b'''}{ab}-\left(\frac{a'''}{a}-\frac{a'''b'''}{ab}-\frac{a'''c'''}{ac}+\frac{a'''b'''c'''}{abc}\right)\chi\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(1+\rho)^{-n}\left[\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha\beta}{ab}-\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha\beta}{ab}-\frac{\alpha\gamma}{ac}+\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right)\chi\right].$$

166. Ier CAS. Soit A la plus vieille des trois têtes. Il est évident que dans ce cas la série ci-dessus exprimera la totalité de l'annuité en reversion demandée, puisque dans la $n^{ième}$ année la tête A s'éteint et tous les termes suivans de la série s'évanouissent. Or dans ce cas, la série ci-dessus est évidemment égale à $A-AB-\chi(A-AB-AC+ABC)$.

167. IIe CAS. Soit B la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la série ci-dessus exprimera la valeur des n premières années de l'annuité en reversion, et la

somme en sera trouvée égale à $A^t - AB - \chi\,[A^t - AB - (AC)^t + ABC]$. Dans les années suivantes, la chance qu'on a de recevoir l'annuité dépendra de la continuation de l'existence de A, et de la probabilité que B a de mourir avant C; la valeur de l'annuité pour les années suivantes sera donc représentée par la série

$$\frac{\varphi\,a'}{a(1+\varrho)^{n+1}} + \frac{\varphi\,a''}{a(1+\varrho)^{n+2}} + \frac{\varphi\,a'''}{a(1+\varrho)^{n+3}} + \text{etc.} = \varphi\,A^d.$$

Donc la valeur totale de l'annuité demandée sera $A - AB - \chi\,(A - AB - AC + ABC) - (1 - \varphi - \chi) \times A^d - \chi(AC)^d$.

168. IIIᵉ cas. Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la série ci-dessus désignera aussi la valeur des n premières années de l'annuité en reversion, et la somme en sera maintenant égale à $A^t - (AB)^t - \chi\,(A^t - (AB)^t - AC + ABC)$: et la valeur des années suivantes de l'annuité sera véritablement exprimée, comme dans le dernier cas, par $\varphi\,A^d$. Donc la valeur totale de l'annuité demandée sera $A - AB - \chi\,(A - AB - AC + ABC) - (1 - \varphi - \chi) \times A^d + (1 - \chi) \times (AB)^d$.

Corollaire.

169. Quand les deux têtes en possession ont le même âge, celui de B, alors φ et χ deviennent, comme dans le corollaire du dernier problème, égaux chacun à $\frac{1}{2}$, et les quantités $(AB)^d$ et $(AC)^d$ s'évanouissent; donc la valeur de l'annuité en reversion est exprimée dans ce cas par $\frac{1}{2}\,(A - ABB)$.

Et quand les deux têtes en possession sont du

même âge que la tête A en reversion, cette expression devient égale à $\frac{1}{2}$ $(A—AAA)$.

Scolie.

170. Si l'on ajoute la valeur trouvée pour l'un des trois cas de ce problème à celle trouvée pour le cas correspondant du problème précédent, la somme sera égale à $A—AB$. Donc, si l'on a une fois déterminé la valeur de l'annuité dans l'un des cas du problème précédent, on trouvera aisément la valeur de la même annuité pour le cas correspondant du problème actuel (pourvu que les trois têtes conservent les mêmes âges) en retranchant la première valeur de $A—AB$, et réciproquement.

Cette règle est presque évidente en elle-même, car si l'on réunit les deux conditions des deux problèmes, on verra que A est certain de jouir de l'annuité après le décès de B, pourvu qu'il subsiste à cette époque. Par conséquent la somme des valeurs trouvées par les deux problèmes doit dans tous les cas être égale à la valeur d'une annuité en reversion sur la tête A après le décès de B. Ainsi la vérité de ce scolie ressort évidemment de l'inspection seule des conditions des deux problèmes.

PROBLÈME XXI.

171. B et C possèdent en commun une annuité, qui, si B survit à C, doit être également partagée entre A et B pendant leur existence simultanée, pour appartenir en totalité au survivant jusqu'à son décès. Trouver la valeur de l'intérêt de A dans cette annuité.

8..

SOLUTION.

Puisque A ne doit rien recevoir si C survit à B, il est évident qu'il a droit à la moitié d'une annuité en reversion sur le groupe AB après l'extinction de C, et encore à la totalité d'une annuité en reversion sur sa seule tête, après l'extinction de B, pourvu que B meure après C. La première valeur est d'après le scolie du nº **76**, égale à $\frac{1}{2}(AB—ABC)$, et la seconde peut être trouvée au moyen des formules du problème XIX, selon que la plus vieille des trois têtes est A, B ou C. De là on déduira aisément les valeurs suivantes, pour chacun de ces trois cas:

Quand A est la plus vieille des trois têtes, la valeur demandée sera $\chi(A—AC)+(\frac{1}{2}—\chi)\times(AB—ABC)$.

Quand B est la plus vieille des trois têtes, elle sera $\chi(A—AC)+(\frac{1}{2}—\chi)\times(AB—ABC)+(1—\varphi—\chi)\times A^d+\chi(AC)^d$.

Quand C est la plus vieille des trois têtes, elle sera $\chi(A—AC)\times(\frac{1}{2}—\chi)\times(AB—ABC)+(1—\varphi—\chi)\times A^d—(1—\chi\times(AB)^d$.

Quand les deux têtes en possession ont le même âge, celui de B, elle sera $\frac{1}{2}(A—AB)$. Et quand toutes les têtes ont l'âge de A, elle sera égale à $\frac{1}{2}(A—AA)$.

Scolie général.

172. Il ne reste plus à déterminer que la valeur de χ pour obtenir la solution de ces trois problèmes; et si les chances qu'une des têtes a de mourir avant ou après l'autre dans chacune des années de leur existence simultanée, étaient dans un rapport cons-

tant, il n'y aurait plus aucune difficulté. Mais puisque cette chance, d'après la mortalité réelle, varie continuellement, nous devons recourir à un calcul approximatif pour trouver la valeur moyenne de ce rapport.

173. Or, après un nombre suffisant d'épreuves, j'ai reconnu que la valeur de χ peut, quand B est la plus jeune des deux têtes B et C, être représentée avec assez d'exactitude par $\frac{(1-\varphi)\,b-\beta}{b-\beta}$, et par $\frac{(1-\varphi)c}{c-\gamma}$ quand C est la plus jeune des deux têtes B et C. Quoique ces deux valeurs ne soient pas strictement correctes, elles conduisent à un résultat plus rapproché de la vraie valeur de l'annuité en reversion, que celui obtenu en égalant généralement χ à $\frac{1}{2}$ quels que soient les âges B et de C, et nous pouvons en faire usage jusqu'à ce qu'on ait trouvé plus exactement la vraie valeur de χ. Mais si l'on obtenait par la suite une expression plus exacte de cette valeur, elle n'apporterait aucun changement à la solution générale des trois problèmes, puisque nous pouvons donner à χ toutes les valeurs possibles.

Je vais maintenant exposer quelques exemples qui indiqueront l'application de ces diverses formules.

174. *Exemple* 1. Quelle est la valeur d'une annuité sur la tête A, âgée de 60 ans, après la tête B, âgée de 40 ans, à condition que B meure *après* une autre tête C âgée de 20 ans : on suppose que l'intérêt soit de 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton.

Nous aurons ici $A = 9,039$, $AB = 7,490$, $AC = 7,995$, $ABC = 6,722$, et $\chi = 0,395$. L'annuité en reversion demandée sera donc dans ce cas égale à $0,276 \times 0,395 = 0,109$.

Mais si B avait 20 ans et C 40 ans, nous aurions $\chi = 0,605$ et par conséquent l'annuité demandée serait dans ce cas égale à $0,276 \times 0,605 = 0,167$.

De la même manière, si A avait 20 ans, B 60 et C 40, nous aurions $A = 16,033$, $AB = 7,995$, $AC = 10,924$, $ABC = 6,722$, $n = 37$, $\chi = 0,354$, et $\varphi = 0,7118$. Par conséquent la valeur de l'annuité serait dans ce cas $3,836 \times 0,354 - 0,067 + 0,026 = 1,317$. Et si B avait 40 ans et C 60, sa valeur serait trouvée égale à $2,519$.

175. Quelle est la valeur d'une annuité sur la tête A âgée de 60 ans, après la tête B âgée de 40 ans, pourvu que B meure *avant* une autre tête C âgée de 20 ans. On suppose que l'intérêt soit de 4 p. 100, et la mortalité conforme aux tables de Northampton.

Nous aurons ici $A - AB = 9,039 - 7,490 = 1,549$: par conséquent $1,649 - 0,109 = 1,440$ sera d'après ce qui a été dit au scolie du n° **170**, la valeur de l'annuité en reversion pour le cas proposé. Et si A avait 20 ans et C 60, cette valeur serait égale à $5,109 - 2,519 = 2,590$.

CHAPITRE VI.

DES ASSURANCES.

176. Dans les chapitres précédens j'ai considéré la valeur actuelle des sommes proposées comme dépendant de l'existence des têtes proposées, ou d'un certain ordre de survivance entre elles, et dans la solution des divers problèmes, je n'ai eu égard qu'aux probabilités que les personnes intéressées dans l'annuité ont de *vivre*. J'arrive maintenant aux questions où il s'agit de trouver la valeur actuelle des annuités ou des capitaux qui dépendent de l'*extinction* des têtes proposées; en un mot, je vais m'occuper des ASSURANCES SUR LA VIE, expression qui désigne cette transaction par laquelle on garantit le paiement d'une *annuité* ou d'un *capital* à l'extinction des têtes sur lesquelles repose le contrat, moyennant un paiement antérieur fait à l'assureur et qui doit être calculé de manière à compenser la chance de perte à laquelle il s'expose. L'objet de ce chapitre sera de déterminer la valeur de ce paiement (qu'on appelle généralement *prime*) dans tous les cas principaux qui peuvent se présenter.

177. Il sera peut-être nécessaire d'observer d'abord que la méthode à suivre pour trouver la valeur d'un *capital* dépendant de l'extinction de têtes quelcon-

ques différera essentiellement de celle à employer pour trouver la valeur d'une *annuité* dépendant des mêmes circonstances. Dans le dernier cas, le bénéficiaire doit recevoir plusieurs rentes annuelles, et l'espérance qu'il a de recevoir chacune d'elles est indépendante de l'espérance qu'il a de recevoir chacune des autres. Mais quand il s'agit de *capitaux*, la question est tout-à-fait différente: car ici on ne doit recevoir qu'une somme unique à l'extinction des têtes proposées, et par conséquent l'espérance qu'on a de la recevoir à la fin d'une année quelconque résulte de cela même qu'on ne l'a pas reçue à la fin d'aucune des années précédentes, ou ce qui est la même chose, la probabilité qu'on a de recevoir cette somme à la fin d'une année quelconque se composera de la probabilité que les têtes proposées ont de s'éteindre dans le courant de cette année, et de celle qu'elles ont eu de survivre à toutes les années précédentes. Les problèmes suivans répandront plus de jour sur cette question.

PROBLÈME XXII.

178. Déterminer la valeur actuelle d'un *capital* payable à la fin de l'année dans laquelle un nombre quelconque de têtes viendra à s'éteindre.

SOLUTION.

Supposons dans la discussion actuelle qu'il ne s'agisse que d'un groupe de trois têtes ABC, dont les probabilités d'exister 1, 2, 3.... ans, soient expri-

mées comme au n° 24, et représentons la somme désignée par s. Or la valeur actuelle de cette somme, si l'on était certain de la recevoir dans un an, serait $s(1+\rho)^{-1}$; mais comme l'espérance qu'on a de recevoir cette somme à la fin de cette année dépend de la dissolution du groupe proposé dans cette année, événement dont la probabilité est $\frac{abc - a'b'c'}{abc}$, on devra multiplier par cette probabilité la valeur ci-dessus, ce qui donnera $s(1+\rho)^{-1} \times \frac{abc - a'b'c'}{abc}$ pour la valeur de l'espérance de la première année.

De la même manière, la valeur actuelle de la somme proposée, si l'on était certain de la recevoir après deux ans, serait $s(1+\rho)^{-2}$; mais comme l'espérance qu'on a de recevoir cette somme à la fin de la seconde année, dépend de la dissolution du groupe dans cette année, événement dont la probabilité est $\frac{a'b'c' - a''b''c''}{abc}$, on devra multiplier par cette probabilité la valeur ci-dessus, ce qui donnera $s(1+\rho)^{-2} \times \frac{a'b'c' - a''b''c''}{abc}$ pour la valeur de l'espérance de la seconde année.

De même encore on trouvera que $s(1+\rho)^{-3} \times \frac{a''b''c'' - a'''b'''c'''}{abc}$ sera la valeur de l'espérance de la troisième année, et ainsi de suite pour toutes les années suivantes de la vie humaine : la somme de ces valeurs sera la valeur totale actuelle de la somme proposée.

179. Mais la somme de ces quantités, réduite à

sa plus simple expression, est égale aux deux séries suivantes :

$$\frac{s}{abc(1+\varrho)}\left[abc+\frac{a'b'c'}{(1+\varrho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]$$
$$-\frac{s}{abc}\times\left[\frac{a'b'c'}{(1+\varrho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right];$$

la première de ces séries est égale à $\frac{s}{(1+\varrho)}(1+ABC)$, et la dernière à $s\times ABC$. Donc la valeur totale actuelle demandée devient

$$s\left[\frac{1+ABC}{(1+\varrho)}-ABC\right]=s\times\frac{1-\varrho ABC}{(1+\varrho)};$$

et quoique cette question soit restreinte au cas de trois têtes, il est aisé de voir que cette méthode de solution est générale et s'applique à un nombre quelconque de têtes ; d'où la règle suivante :

180. Multipliez la valeur d'une annuité sur les têtes proposées, par le taux de l'intérêt, et retranchez le produit de l'annuité ; divisez le reste par le produit du placement de 1 fr. après un an, et le quotient, multiplié par la somme proposée, sera la valeur demandée.

Voyez, pour l'application de ce problème, la question XXVII du chapitre XII.

Corollaire 1.

181. Dans ce problème, j'ai considéré la valeur actuelle du capital assuré, comme dépendant de la dissolution du groupe de têtes proposé dans une année *quelconque* de leur existence simultanée. Mais

si l'assurance est *différée* de n années, c'est-à-dire si nous voulons déterminer la valeur actuelle d'une somme payable à la dissolution de ce groupe, pourvu que cet événement n'ait lieu qu'après un délai fixé, la formule éprouvera un changement important. Car, en suivant la même marche que dans le problème, on trouvera que l'espérance qu'on a de recevoir la somme proposée à la fin des $(n+1)^{me}$, $(n+2)^{me}$, $(n+3)^{me}$, etc. années, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, sera représentée par la série

$$s\times\left[\frac{\alpha\beta\gamma-\alpha'\beta'\gamma'}{abc(1+\rho)^{n+1}}+\frac{\alpha'\beta'\gamma'-\alpha''\beta''\gamma''}{abc(1+\rho)^{n+2}}+\frac{\alpha''\beta''\gamma''-\alpha'''\beta'''\gamma'''}{abc(1+\rho)^{n+3}}+\text{etc.}\right],$$

qui, pour plus de commodité, peut se diviser en deux autres,

$$\frac{s}{abc(1+\rho)^{n}}\times\left[\frac{\alpha\beta\gamma}{(1+\rho)}+\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{(1+\rho)^{2}}+\frac{\alpha''\beta''\gamma''}{(1+\rho)^{3}}+\text{etc.}\right]$$
$$-\frac{s}{abc(1+\rho)^{n}}\times\left[\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{(1+\rho)}+\frac{\alpha''\beta''\gamma''}{(1+\rho)^{2}}+\frac{\alpha'''\beta'''\gamma'''}{(1+\rho)^{3}}+\text{etc.}\right].$$

La seconde de ces séries est, d'après le problème I, corollaire 3, égale à $-s(ABC)^d$; et la première est égale à $s\times\dfrac{\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}+(ABC)^d}{(1+\rho)}$; la valeur demandée est donc égale à $s\times\dfrac{\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}-\rho(ABC)^d}{(1+\rho)}$; d'où la règle suivante (1) :

---

(1) Puisque $(ABC)^d$ est, d'après le prob. I, corol. 3, égal à $A^0B^0C^0\times\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}$, il est évident que la valeur de-

182. Multipliez la valeur d'une annuité différée sur les têtes proposées, par le taux de l'intérêt; retranchez le produit de l'espérance que les têtes proposées ont de recevoir 1 fr. à la fin du délai fixé, et divisez le reste par le produit du placement de 1 fr. après un an. Le quotient qui en résultera étant multiplié par la somme proposée donnera la valeur demandée.

Voyez pour l'application de ce corollaire, la question XXVIII du chapitre XII.

Corollaire 2.

183. Mais, si l'assurance est *temporaire*, c'est-à-dire si nous voulons déterminer la valeur d'une somme payable à la dissolution du groupe proposé, pourvu que cet événement ait lieu dans les limites d'un délai fixé n, on en trouvera la valeur en ajoutant les n premiers termes de la série donnée dans le problème. Cette valeur sera donc désignée dans ce cas par la série

$$s \times \left[\frac{abc-a'b'c'}{abc\,(1+\rho)} + \frac{a'b'c'-a''b''c''}{abc\,(1+\rho)^2} + \frac{a''b''c''-a'''b'''c'''}{abc-(1+\rho)^3} + \ldots \frac{\alpha_{,}\beta_{,}\gamma_{,}-\alpha\beta\gamma}{abc(1+\rho)^n}\right]:$$

qui pour plus de commodité peut se diviser en deux

---

mandée, dans le cas d'une seule tête ou d'un groupe de plusieurs têtes, peut être plus commodément exprimée par $s \times \frac{1-\varrho\,A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ}}{(1+\varrho)}\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\varrho)^{-n}$: et c'est de cette formule que j'ai déduit la règle de la question XXVIII du chapitre XII. Mais cette règle ne s'étend pas à tous les cas.

tres

$$\frac{s}{(1+\varrho)}\left[abc+\frac{a'b'c'}{(1+\varrho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{\alpha_{\prime}\beta_{\prime}\gamma_{\prime}}{(1+\varrho)^{n-1}}\right]$$

$$\frac{s}{abc}\left[\frac{a'b'c'}{(1+\varrho)}-\frac{a''b''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{\alpha\beta\gamma}{(1+\varrho)^n}\right].$$ Mais

première de ces séries est égale à $s\times\frac{1+(ABC)^{t-1}}{(1+\varrho)}$; (1) la seconde à $s\ (ABC)^t$: la valeur de l'assurance mporaire demandée peut donc être représentée par formule $s\left[\frac{1+(ABC)^{t-1}}{(1+\varrho)}-(ABC)^t\right]$.

Mais puisque $(ABC)^{t-1}+\frac{\alpha\beta\gamma}{abc(1+\varrho)^n}$ égale $(ABC)^t$, 'où l'on tire $(ABC)^{t-1}=(ABC)^t-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\times(1+\rho)^{-n}$; t puisque d'après le prob. I. cor. 4, $(ABC)^t$ est égal $ABC-(ABC)^d$; nous pouvons rendre la formule i-dessus plus propre à l'usage général en remplaçant $ABC)^t$ par cette valeur : elle deviendra donc égale

$$s\times\frac{1-\rho\,ABC-\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}-\rho(ABC)^d\right.}{(1+\varrho)}:$$

'où la règle suivante :

184. De la valeur actuelle de l'assurance payable l'extinction des têtes proposées, retranchez la va-ur actuelle de la même assurance différée du délai xé; le reste sera la valeur demandée.

Voyez pour l'application de ce corollaire, la ques-on XXIX du chapitre XII.

---

(1) Ce nouveau caractère $(ABC)^{t-1}$ désigne la valeur d'une nnuité temporaire sur le groupe ABC pendant $(n-1)$ années.

Corollaire 3.

185. Quoique dans la discussion de ce problè
je n'aie considéré que le cas où il s'agit d'un grou
de trois têtes, il est cependant facile d'appliquer
même raisonnement lorsqu'il s'agit d'une seule tê
quelconque, ou d'un groupe quelconque d'aut
têtes, ou de la dernière vivante des têtes prop
sées, etc. Il suffira pour obtenir les valeurs dema
dées, de substituer la valeur d'une annuité reposa
sur cette tête, ou sur ce groupe de têtes, etc. à la qua
tité représentée par *ABC* dans la formule du n° 17

186. La même observation s'appliquera aussi a
deux corollaires précédents, si, outre la substituti
dont nous venons de parler, nous remplaçons au
par la valeur d'une semblable annuité, *différée*
délai désigné, la quantité $(ABC)^d$ des formul
n° **181** ou **183**. Mais ici on devra spécialeme
observer que quand une assurance différée ou te
poraire dépend du *dernier décès* des têtes proposée
la quantité $\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}$ dans la formule donnée d
désigner l'espérance que la dernière vivante de
têtes a de recevoir 1 fr. à la fin du délai fixé; et qu
quand l'assurance dépend de l'extinction de *de*
quelconques de *trois* têtes proposées, la même qua
tité doit désigner l'espérance que deux quelconqu
de ces trois têtes ont de recevoir 1 fr. à la fin
délai, etc. etc.

Voyez pour l'application de ce corollaire, les que
tions XXVII, XXVIII et XXIX du chapitre XII.

PROBLÈME XXIII.

187. **Trouver la valeur d'une *annuité* qui commencera à courir à la fin de l'année dans laquelle s'éteindra une combinaison quelconque de têtes.**

SOLUTION.

Supposons, comme dans le problème précédent, que le question n'embrasse qu'un groupe de trois têtes ABC, et que l'annuité proposée soit une rente perpétuelle ou une propriété foncière. Or, la chance que l'héritier de cette propriété a d'en toucher la rente à la fin d'une année quelconque dépend toujours de la dissolution du groupe de têtes avant la fin de cette année. La probabilité de cet événement est pour la première année $\left(1-\frac{a'b'c'}{abc}\right)$, expression qui multipliée par $(1+\rho)^{-1}$ donnera l'espérance de la première année. De même la probabilité que le groupe de têtes a de se dissoudre avant la fin de la seconde année est $\left(1-\frac{a''b''c''}{abc}\right)$, expression qui multipliée par $(1+\rho)^{-2}$ donnera l'espérance de la seconde année. On trouvera de même que l'expression $\left(1-\frac{a'''b'''c'''}{abc}\right)$ multipliée par $(1+\rho)^{-3}$ désignera l'espérance de la troisième année; et ainsi de suite jusqu'à l'infini: puisque la propriété est perpétuelle de sa nature. Donc la somme de toutes ces valeurs continuées indéfiniment sera la valeur totale actuelle de la propriété dont on doit jouir après la dissolution du

groupe ABC, ou en d'autres termes sera la somme qu'on aurait à payer aujourd'hui pour s'assurer la juissance de cette propriété après la dissolution de ce groupe de têtes.

188. Mais la somme de tous ces termes est égale aux deux séries suivantes :

$$\frac{1}{(1+\varrho)} + \frac{1}{(1+\varrho)^2} + \frac{1}{(1+\varrho)^3} + \ldots \infty$$

$$- \frac{1}{abc} \times \left(\frac{a'b'c'}{(1+\varrho)} + \frac{a''b''c''}{(1+\varrho)^2} + \frac{a'''b'''c'''}{(1+\varrho)^3} + \text{etc.}\right).$$ La première de ces séries est égale à $\frac{1}{\varrho}$, ou la valeur actuelle d'une annuité perpétuelle de 1 fr., et la seconde doit se terminer à l'extinction de la plus âgée des trois têtes, et est conséquemment égale à la valeur d'une annuité sur le groupe ABC. Donc la valeur totale de l'annuité demandée est égale à $\frac{1}{\varrho} - ABC$: et quoique cette solution ne s'applique qu'au cas d'un groupe de trois têtes, il sera cependant facile d'employer le même raisonnement pour une combinaison quelconque de têtes : de là la règle suivante :

189. Retranchez la valeur d'une annuité reposant sur les têtes données, de la valeur actuelle de l'annuité ou de la propriété en question ; le reste sera la valeur demandée.

Voyez pour l'application de ce problème, la question XXVI du chapitre XII.

Corollaire 1.

190. Si l'annuité au lieu d'être perpétuelle, était

temporaire et ne devait courir que pendant un nombre d'années n, plus grand toutefois que la durée possible de l'existence des têtes proposées, nous devrions substituer la valeur de cette annuité temporaire à celle de l'annuité perpétuelle. La formule deviendrait, de cette manière $\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} - ABC$; et la règle que je viens d'établir est donc également applicable à ce cas.

Voyez pour l'application de ce corollaire, la question XXVI du chapitre XII.

Corollaire 2.

191. Mais si l'annuité, au lieu d'être perpétuelle, ou temporaire pour une période éloignée, ne devait courir que pendant un nombre d'années n, moindre que la durée possible de l'existence des têtes proposées, la série qui résout le problème se terminerait à la fin de cette période, et serait donc égale à

$$\frac{1}{(1+\rho)} + \frac{1}{(1+\rho)^2} + \frac{1}{(1+\rho)^3} \dots \frac{1}{(1+\rho)^n} - \frac{1}{abc}$$
$$\left[\frac{a'b'c'}{(1+\rho)} + \frac{a''b''c''}{(1+\rho)^2} + \frac{a'''b'''c'''}{(1+\rho)^3} + \dots \frac{\alpha\beta\gamma}{(1+\rho)^n}\right).$$

Or, la première partie de cette série est égale à $\frac{1-(1+\rho)^n}{\rho}$, et la dernière est d'après le prob. 1 cor. 4. égale à $-(ABC)^t$. D'où la règle suivante :

192. De la valeur d'une annuité *certaine* de n années, retranchez la valeur d'une annuité temporaire du même nombre d'années, dépendante de l'existence des têtes proposées; le reste sera la valeur demandée.

Corollaire 3.

193. Si la chance dont dépend la jouissance de l'annuité est *différée* d'un nombre d'années n, la série exprimant la valeur générale de l'annuité perpétuelle en reversion ne doit commencer qu'après ce délai pour continuer alors jusqu'à l'infini ; c'est-à-dire que la série

$$\frac{1-\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}}{(1+\rho)^{n+1}}+\frac{1-\frac{\alpha''\beta''\gamma''}{\alpha\beta\gamma}}{(1+\rho)^{n+2}}+\frac{1-\frac{\alpha'''\beta'''\gamma'''}{\alpha\beta\gamma}}{(1+\rho)^{n+3}}+\ldots.\infty$$

désignera la valeur de l'annuité demandée, dont on entrerait en jouissance si l'une des têtes proposées venait à s'éteindre après la $n^{ième}$ année. Or cette série peut se décomposer en deux autres :

$$(1+\rho)^{-n}\times\left[\frac{1}{(1+\rho)}+\frac{1}{(1+\rho)^2}+\frac{1}{(1+\rho)^3}+\ldots\infty\right]-\frac{1}{\alpha\beta\gamma(1+\rho)^n}$$
$$\times\left[\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{(1+\rho)}+\frac{\alpha''\beta''\gamma''}{(1+\rho)^2}+\frac{\alpha'''\beta'''\gamma'''}{(1+\rho)^3}+\text{etc.}\right];$$

la première de ces séries est égale à $(1+\rho)^{-n}\times\frac{1}{\rho}$; et la dernière est, d'après le prob. I, cor. 3, égale à $-(1+\rho)^{-n}\times A^\circ B^\circ C^\circ$. Donc la valeur de l'annuité demandée serait égale à $(1+\rho)^{-n}\times\left(\frac{1}{\rho}-A^\circ B^\circ C^\circ\right)$ si l'on était certain que les têtes proposées dussent atteindre la fin de la $n^{ième}$ année ; mais comme la probabilité de cet événement est $\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}$, nous devons multiplier par cette quantité l'expression ci-dessus pour obtenir la valeur demandée. Cette valeur est

donc égale à

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}\times\frac{1}{\rho}-A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ}\times\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais $A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ}\times\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}$ est, d'après le prob. I, corol. 3, égal à $(ABC)^{d}$; la valeur ci-dessus devient donc $\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}\times\frac{1}{\rho}-(ABC)^{d}$: d'où la règle suivante :

194. Multipliez l'espérance que les têtes proposées ont de recevoir 1 fr. à la fin du délai fixé par la valeur de l'annuité perpétuelle; retranchez du produit la valeur d'une annuité différée du délai fixé sur les têtes proposées : le reste sera la valeur demandée.

Corollaire 4.

195. Si la chance dont dépend la jouissance de l'annuité est *temporaire*, c'est-à-dire si nous avons à déterminer la valeur de ces sortes d'annuités qui dépendent de l'extinction des têtes proposées, pourvu que cet événement ait lieu dans un certain laps de temps n; la valeur de l'assurance sera exprimée par la série

$$\frac{1-\frac{a'b'c'}{abc}}{(1+\rho)}+\frac{1-\frac{a''b''c''}{abc}}{(1+\rho)^{2}}+\frac{1-\frac{a'''b'''c'''}{abc}}{(1+\rho)^{3}}+\ldots$$
$$\frac{1-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}}{(1+\rho)^{n}}+\frac{1-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}}{(1+\rho)^{n+1}}+\frac{1-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}}{(1+\rho)^{n+2}}+\ldots\infty.$$

Car la rente de la $n^{ième}$ année et toutes les suivantes dépendant de l'extinction des têtes proposées dans

l'espace de n années, il est évident que toutes ces rentes consécutives doivent être multipliées par le facteur commun $\left(1-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right)$. Mais les n premiers termes de cette série sont égaux à $\frac{1-(1+\varrho)^{-n}}{\varrho}-(ABC)^{\prime}$; comme nous l'avons trouvé par le corollaire 2; et les termes restans sont égaux à

$$\left(1-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right)\times(1+\varrho)^{n}\times[(1+\varrho)^{-1}+(1+\varrho)^{-2}+(1+\varrho)^{-3}+\ldots.\infty]$$
$$=\left(1-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\right)\times(1+\varrho)^{-n}\times\frac{1}{\varrho}.$$

Donc la valeur totale de la série devient

$$\frac{1-(1+\varrho)^{-n}}{\varrho}-(ABC)^{\prime}+\frac{(1+\varrho)^{-n}}{\varrho}-\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}\times\frac{1}{\varrho};$$

expression qui, puisque $(ABC)^{\prime}=ABC-(ABC)^{d}$ peut se réduire en

$$\frac{1}{\varrho}-ABC-\left[\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}\times\frac{1}{\varrho}-(ABC)^{d}\right]:$$

d'où la règle suivante :

196. De la valeur totale de l'annuité perpétuelle dépendant de l'extinction des têtes proposées, retranchez la valeur de la même annuité, différée du délai fixé : le reste sera la valeur demandée.

Corollaire 5.

197. Il ressort évidemment de ce qui a été dit au corollaire 1, que si l'annuité, au lieu d'être perpétuelle, était limitée à un certain nombre d'années,

les règles des deux derniers corollaires seraient également applicables; il suffirait de substituer l'annuité limitée à l'annuité perpétuelle. Cette annuité temporaire devrait toutefois embrasser plus de temps que l'assurance proposée.

Corollaire 6.

198. Quoique, dans ce problème, je n'aie considéré que le cas où il s'agit d'un groupe de trois têtes, il sera cependant facile d'appliquer le même raisonnement à toute autre combinaison de têtes, et il suffira de substituer la valeur d'une annuité dépendant de cette combinaison de têtes, soit pour la totalité de leur existence, soit différée d'un certain nombre d'années, aux expressions ABC, ou $(ABC)^d$ des formules que j'ai exposées, pour obtenir les résultats demandés.

199. Toutefois on devra spécialement observer que, quand il s'agit du dernier décès d'un nombre quelconque de têtes, la quantité $\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}(1+\rho)^{-n}$, représente l'espérance que la dernière vivante de ces têtes a de recevoir 1 fr. à la fin du délai fixé. Une observation analogue s'applique au cas où l'assurance dépend de l'extinction de deux quelconques de trois têtes proposées, etc., etc. Voyez le problème XXII, corollaire 3.

Scolie.

200. Au moyen de ces deux problèmes et de leurs corollaires, on peut résoudre toutes les questions re-

latives à la valeur des assurances d'un capital ou d'une annuité qui dépendent des diverses conditions que j'ai exposées. Et comme tout capital peut être converti en une annuité perpétuelle correspondante, si on le multiplie par l'intérêt annuel de 1 fr., il semble, au premier abord, qu'il reviendrait au même de déterminer la valeur actuelle d'un capital dépendant de l'extinction d'un nombre quelconque de têtes, ou celle d'une annuité correspondante dépendant des mêmes circonstances. Mais on doit observer que le premier paiement de l'annuité est touché par le bénéficiaire à la fin de l'année dans laquelle s'éteignent les têtes proposées, quelle que soit d'ailleurs la fraction d'année qui n'est pas encore écoulée; cette époque est aussi celle de l'échéance du capital. Dans le premier cas, le bénéficiaire entre donc en jouissance de son annuité, ou reçoit la rente de la première année, en même temps que le bénéficiaire du capital est supposé placer cette somme pour acquérir une rente perpétuelle équivalente, mais dont il ne recevra le premier paiement *qu'un an plus tard.* Ainsi l'annuité assurée vaut une année de rente de plus que le capital correspondant; donc la première est au second dans le même rapport que 1 fr. augmenté de son intérêt pendant un an, est à 1 fr., c'est-à-dire :: $(1+\rho) : 1$.

201. Donc, si l'on multiplie par $(1+\rho)$ la valeur actuelle du capital exigible, on aura celle de la propriété foncière ou de l'annuité perpétuelle correspondante. Ainsi, la valeur actuelle d'une annuité

perpétuelle de 1 fr. payable après la dissolution du groupe ABC, est, d'après le problème XXII, égale à $\frac{1 - \varrho ABC}{\varrho}$, et la valeur actuelle d'un capital correspondant, $\frac{1}{\varrho}$, payable aux mêmes conditions, est, d'après le problème XXIII, égale à $\frac{1}{\varrho} \times \frac{1 - \varrho ABC}{(1+\varrho)}$ $= \frac{1}{(1+\varrho)} \times \frac{1 - \varrho ABC}{\varrho}$; or il est évident que la première expression est à la seconde dans le rapport de $(1+\rho)$ à 1.

202. Il résulte également de ce rapport, que si l'on divise la valeur de l'annuité payable après l'extinction d'une combinaison quelconque de têtes, par le produit de 1 fr. augmenté de son intérêt après un an, on obtiendra la valeur du capital correspondant dépendant de l'extinction des mêmes têtes.

En comparant les exemples semblables des deux problèmes et de leurs corollaires, on confirmerait pleinement la vérité de ces remarques, ainsi qu'on peut le voir dans le scolie de la question XXVII du chapitre XII.

CHAPITRE VII.

DES ANNUITÉS VIAGÈRES SUR DES TÊTES SUCCESSIVES ET DES TÉNEMENS VIAGERS.

203. Dans tous les problèmes précédens, qui traitent la question des annuités viagères en reversion, les têtes sur lesquelles doivent reposer ces annuités ont été supposées fixées et déterminées *actuellement*, et la valeur d'une annuité sur ces têtes est par conséquent d'autant moindre que l'époque de leur entrée en possession est plus éloignée. Dans les questions qui vont maintenant nous occuper, la tête en reversion est supposée devoir être déterminée librement *à l'extinction* de la tête en possession, et sera probablement celle qui offrira *alors* le plus de chances de longévité. Cette tête peut donc être considérée comme ayant dès aujourd'hui une valeur déterminée, puisqu'elle sera toujours choisie de manière à répondre le mieux possible aux vues des personnes intéressées ; et on lui donne généralement pour *âge moyen*, celui que les tables indiquent comme présentant le plus de chances de longévité. Nous allons faire connaître, par quelques problèmes, la nature de ces questions.

PROBLÈME XXIV.

204. Supposons que A jouisse d'une annuité jusqu'à son décès, et qu'avant de mourir il ait la faculté de se choisir un successeur B, qui jouisse à son tour de l'annuité jusqu'à son décès : trouver la valeur actuelle de l'annuité sur la tête en succession, et la valeur totale de l'annuité sur les deux têtes successives.

SOLUTION.

Supposons que l'annuité sur la tête en succession B, désignable au décès de A, soit *à cette époque* égale à B. Or, la probabilité que la première tête a de s'éteindre, et la seconde d'entrer en possession, dans la première année, étant $\frac{a-a'}{a}$, et la valeur totale de l'annuité par rapport à B, lors de son entrée en possession, étant B, il s'ensuit que son espérance pour la première année sera, comme dans le problème XXII, représentée par $B \times \frac{a-a'}{a(1+\varrho)}$. On trouvera de même que $B \times \frac{a'-a''}{a(1+\varrho)^2}$ représente son espérance pour la seconde année, et $B \times \frac{a''-a'''}{a(1+\varrho)^3}$ son espérance pour la troisième, et ainsi de suite pour toutes les années suivantes jusqu'aux dernières limites de la vie de A.

La somme de toutes ces valeurs est égale à $\frac{B}{a(1+\varrho)} \times \left[a + \frac{a'}{1+\varrho} + \frac{a''}{(1+\varrho)^2} + \frac{a'''}{(1+\varrho)^3} + \text{etc.}\right] - \frac{B}{a} \times \left[\frac{a'}{1+\varrho} + \frac{a''}{(1+\varrho)^2} + \frac{a'''}{(1+\varrho)^3} + \text{etc.}\right]$; cette ex-

pression qui, d'après le problème XXII, est égale à $B \times \frac{1 - \rho A}{(1 + \rho)}$, serait la valeur demandée, si B était un *capital* en reversion payable au décès de A: mais comme B désigne la valeur d'une *annuité*, dont le premier paiement n'a lieu qu'à la fin de l'année dans laquelle s'éteint la tête A, nous devrons multiplier l'expression ci-dessus par $(1 + \rho)$, d'après ce qui a été dit dans le scolie de la page 133; donc $B(1 - \rho A)$ sera la vraie valeur de l'annuité sur la tête en succession; d'où la règle suivante :

205. Multipliez la valeur d'une annuité sur la tête en possession, par le taux de l'intérêt, et retranchez le produit de l'unité; multipliez le reste par la valeur présumée d'une annuité sur la tête en succession : le produit sera la valeur actuelle d'une annuité sur cette tête en succession.

206. Si l'on ajoute cette valeur à celle d'une annuité sur la tête en possession, on aura $A + B(1 - \rho A)$ pour la valeur de l'annuité sur les deux têtes successives.

Voyez, pour l'application de ce problème, la question XXIII du chapitre XII.

Corollaire 2.

207. On peut déterminer par là la valeur actuelle d'une annuité sur un *groupe* quelconque de têtes, ou payable jusqu'au *dernier décès* d'un nombre quelconque de têtes, ou dépendant de toute autre com-

naison de têtes qui doivent succéder à une comnaison semblable : car, en appelant respectivement A et B les valeurs d'une annuité sur ces têtes, formule ci-dessus exprimera la valeur actuelle une annuité sur ces têtes en succession.

Corollaire 2.

208. Si la tête en succession, au lieu de recevoir annuité *jusqu'à son décès,* ne la devait toucher que ndant un nombre *certain* d'années, à partir de xtinction de la tête en possession; dans ce cas, suffirait d'appeler B la valeur de cette annuité cerne pour que la formule ci-dessus exprimât enre exactement la valeur actuelle de cette annuité, nt on doit entrer en jouissance à l'extinction de tête en possession.

Et si cette annuité était perpétuelle, B serait égale $\frac{1}{\varrho}$, et la formule deviendrait $\frac{1}{\varrho} - A$, expression entique avec celle déduite du problème XXIII.

Voyez, pour l'application de ce corollaire, la iestion XXIV du chapitre XII.

PROBLÈME XXV.

209. Trois têtes, A, B, C, étant données en succession, trouver la valeur de l'annuité sur la troième tête en succession, et aussi la valeur totale e l'annuité sur les trois têtes successives.

SOLUTION.

Supposons que les valeurs d'une annuité sur chaune des trois têtes, à l'époque où elles entrent en

possession, soient respectivement représentées par *A*, *B*, *C*. Or la valeur d'une annuité commençant au décès de A sur la première tête en succession, étant à la valeur d'une rente perpétuelle commençant à la même époque, dans le rapport de *B* à $\frac{1}{\rho}$, il s'ensuit que la valeur *actuelle* de la première sera à la valeur *actuelle* de la seconde, dans le même rapport. Mais la valeur actuelle de la rente perpétuelle commençant au décès de A, est, d'après le problème XXIII, égale à $\frac{1}{\rho} - A = \frac{1 - \rho A}{\rho}$: donc, $\frac{1}{\rho} : B :: \frac{1 - \rho A}{\rho} : x = B\,(1 - \rho A)$; le dernier terme de cette proportion est la valeur actuelle de l'annuité sur la première tête en succession. Nous avons trouvé le même résultat par le dernier problème; on voit donc que les deux méthodes de solution se servent de preuve l'une à l'autre.

La valeur actuelle de l'annuité sur les deux premières têtes successives étant ainsi trouvée égale à $A + B(1 - \rho A)$, il s'ensuit que la valeur actuelle de la reversion d'une annuité perpétuelle après l'extinction de ces têtes, sera (d'après le problème XXIII) égale à $\frac{1}{\rho} - [A + B(1 - \rho A)] = \frac{1}{\rho}(1 - \rho A) \times (1 - \rho B)$. Conséquemment, puisque la valeur d'une annuité sur la troisième tête en succession (à partir du décès de B), est à la valeur d'une annuité perpétuelle (à partir de la même époque) dans le rapport de *C* à $\frac{1}{\rho}$; il s'ensuit que la valeur actuelle de la première

a à la valeur actuelle de la seconde dans le même
ɔport, c'est-à-dire qu'on aura

$$; C :: \frac{1}{\varrho}(1-\varrho A)\times(1-\varrho B) : x = C\times(1-\varrho A)\times(1-\varrho B);$$

leur actuelle d'une annuité sur la troisième tête
ccessive ; d'où la règle suivante :

210. Multipliez la valeur d'une annuité sur la tête
possession, par le taux de l'intérêt, et retran-
ez le produit de l'unité; multipliez aussi la valeur
ésumée d'une annuité sur la seconde tête en suc-
sion, par le taux de l'intérêt, et retranchez de même
produit de l'unité; multipliez ensemble ces deux
tes, et leur produit par la valeur présumée d'une
ıuité sur la troisième tête, lors de son entrée en
issance; ce dernier produit sera la valeur actuelle
l'annuité sur la troisième tête successive.

211. Si l'on ajoute ensemble les valeurs actuelles
ur chaque tête successive, comme nous les avons
uvées ci-dessus, leur somme ou $A+B(1-\rho A)$
$C(1-\rho A)\times(1-\rho B)$ sera la valeur actuelle de
ınuité sur les trois têtes successives; cette expres-
ın sera trouvée égale à $\frac{1}{\varrho}\Big[1-(1-\rho A)\times$
$-\rho B)\times(1-\rho C)\Big]$; d'où la règle suivante :

212. Multipliez les valeurs présumées d'une an-
ıuité sur chacune des têtes proposées, par le taux
le l'intérêt; retranchez de l'unité chacun de ces

produits, et multipliez ensemble tous les restes; retranchez aussi de l'unité ce dernier produit, et divisez le reste par le taux de l'intérêt; le quotient sera la valeur actuelle de l'annuité sur toutes les têtes successives, en y comprenant la tête en possession.

PROBLÈME XXVI.

213. Supposons qu'une personne achète moyennant une somme s un ténement viager constitué sur un nombre quelconque de têtes A, B, C, ..., à condition qu'elle ou ses représentans auront la faculté d'en renouveler continuellement la jouissance en payant à chaque décès une prime p; trouver la valeur actuelle du prix total de cette aliénation.

SOLUTION.

Soient A, B, C, etc. les valeurs respectives d'une annuité sur chacune des têtes A, B, C, ... en possession, et soient (1) A^1, A^2, A^3, ... les valeurs respectives d'une annuité sur chacune des têtes A^1, A^2, A^3, que nous supposons devoir succéder directement à A. De la même manière, soient B^1, B^2, B^3, ... les valeurs respectives d'une annuité sur chacune des têtes B^1, B^2, B^3, que nous supposons devoir suc-

(1) On doit prendre garde de se méprendre sur la signification de ces indices, dont l'objet est seulement de désigner l'ordre dans lequel doivent se succéder les têtes, et nullement leur âge relatif.

céder directement à B, et ainsi de suite pour les têtes qui doivent succéder à C, D.... Cherchons d'abord à déterminer la valeur actuelle de toutes les primes qu'on aurait à payer à l'extinction de la tête A et de celles qui doivent lui succéder directement.

Or, la valeur actuelle de la prime p payable au décès de A, à quelque époque de l'année qu'il ait lieu, peut, dans ce cas, être assimilée à la valeur actuelle d'une rente annuelle de $p . \rho$ dont on entrerait en jouissance au décès de A, valeur qui, d'après le problème XXIII, est trouvée égale à...... $p\rho\left(\frac{1}{\rho} - A\right) = p(1 - \rho A)$. Si, dans cette formule, nous substituons à A la valeur actuelle de l'annuité sur les deux têtes successives A, A', qui, d'après le problème XXIV, est trouvée égale à........ $A + A'(1 + \rho A)$, nous aurons $p(1-\rho A)\times(1-\rho A')$ pour la valeur actuelle de la prime à payer au décès de A'. Et si, dans la même formule, nous substituons à A la valeur actuelle de l'annuité sur les trois têtes successives A, A', A'', qui, d'après le dernier problème, est trouvée égale à $A + A'(1 - \rho A) + A''(1 - \rho A) \times (1 - \rho A')$, nous aurons $p(1-\rho A) \times (1 - \rho A') \times (1 - \rho A'')$ pour la valeur actuelle de la prime payable au décès de A'', et ainsi de suite pour toutes les primes suivantes payables à l'extinction des têtes qui succèderont à A. La somme de toutes ces quantités, ou la série $p[(1 - \rho A) + (1 - \rho A) \times (1 - \rho A') + (1 - \rho A) \times (1 - \rho A') \times (1 - \rho A^2) + \ldots$ jusqu'à l'infini] est la valeur actuelle de toutes les primes qui doivent être payées

de temps en temps, pour renouveler le bail avec les diverses têtes qui doivent succéder à A.

En raisonnant de la même manière, on trouverait que la série $p[(1-\rho B)+(1-\rho B)\times(1-\rho B^1)+(1-\rho B)\times(1-\rho B^1)\times(1-\rho B^2)+\ldots$ jusqu'à l'infini] désigne la valeur actuelle de toutes les primes qui doivent être payées de temps en temps pour renouveler le bail avec les diverses têtes qui succéderont à B, et ainsi de suite pour toutes les autres têtes C, D...., et celles qui leur succéderont : la somme de toutes ces différentes séries, ou

$$\begin{aligned} &p[(1-\rho A)+(1-\rho A)\times(1-\rho A^1)+\ldots\infty] \\ +\;&p[(1-\rho B)+(1-\rho B)\times(1-\rho B^1)+\ldots\infty] \\ +\;&p[(1-\rho C)+(1-\rho C)\times(1-\rho C^1)+\ldots\infty] \\ +\;&\text{etc.}\qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.} \end{aligned}$$

sera la valeur totale actuelle de toutes les primes que le tenancier aura jamais à payer; et cette expression ajoutée à s donnera la valeur totale payée pour cette aliénation.

Corollaire 1.

214. Si l'on suppose que les têtes avec lesquelles le bail est renouvelé à chaque décès, soient toutes égales entre elles ou du même âge que A^1, l'expression générale ci-dessus devient

$$\begin{aligned} &p(1-\rho A)[1+(1-\rho A^1)+(1-\rho A^1)^2+(1-\rho A^1)^3+\ldots\infty] \\ +\;&p(1-\rho B)[1+(1-\rho A^1)+(1-\rho A^1)^2+(1-\rho A^1)^3+\ldots\infty] \\ +\;&p(1-\rho C)[1+(1-\rho A^1)+(1-\rho A^1)^2+(1-\rho A^1)^3+\ldots\infty] \\ &\text{etc.}\qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.} \end{aligned}$$

Etpuisque (1) $[1+(1-\rho A')+(1-\rho A')^2+(1\rho-A'^3)+\ldots\infty]$ est égal à $\frac{1}{\rho A'}$, la somme de toute la série devient

$$\frac{p}{A'}\left(\frac{1}{\rho}-A+\frac{1}{\rho}-B+\frac{1}{\rho}-C+\text{etc.}\right)=\frac{p}{A'}\left(\frac{n}{\rho}-A-B-C-\text{ etc.}\right),$$

expression dans laquelle n désigne le nombre de têtes sur lesquelles est constitué le ténement : d'où la règle suivante :

215. Divisez le nombre de têtes par le taux de l'intérêt, et retranchez du quotient la somme des valeurs respectives d'une annuité sur chacune des têtes en possession; divisez le reste par la valeur présumée d'une annuité sur la tête d'un âge moyen avec laquelle on renouvelle le bail à chaque décès : le quotient étant multiplié par la prime payable à chaque renouvellement sera la valeur totale actuelle de tous les renouvellemens à venir; et si l'on ajoute ce produit à la somme donnée en premier lieu, on aura la valeur totale de l'acquisition.

216. *Exemple.* Supposons qu'une personne ait payé 1000 fr. pour l'acquisition d'un ténement viager reposant sur trois têtes dont les âges sont 30, 50

---

(1) On doit savoir que $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\infty$: donc en remplaçant x par $(1-\rho A')$, on aura $\frac{1}{\rho A'}$ égal à la série donnée dans le texte.

et 70 ans, à condition qu'à l'extinction de l'une d'elles elle aura la faculté de renouveler continuellement le bail avec une autre tête quelconque à son choix, moyennant le paiement d'une prime de 600 fr. : quelle est la valeur actuelle de toutes les primes qu'on doit ainsi payer en renouvellement; l'intérêt étant supposé à 5 p. 100 et la mortalité conforme aux observations de M. Deparcieux?

Ici, nous aurons $A = 14{,}693$, $B = 11{,}363$, $C = 6{,}055$, $n = 3$, $\rho = 0{,}05$, $p = 600$, et A' (ou la valeur d'une annuité sur la tête que la table désigne comme ayant le plus de chances (1) de longévité) $= 16{,}213$. Par conséquent,

$$\frac{600}{16{,}213}(60 - 32{,}111) = 1032{,}097$$

sera la valeur actuelle de toutes les primes, et cette quantité ajoutée aux 1000 fr. payés à l'entrée en jouissance donnera la valeur de cette acquisition.

Corollaire 2.

217. Quand toutes les têtes en possession sont du même âge que A, la formule du corollaire précédent devient égale à $\frac{pn}{A^1}\left(\frac{1}{\rho} - A^1\right)$ Mais si toutes les têtes,

---

(1) C'est toujours la valeur présumée de A', d'après ce qui a été dit n° 203.

aussi bien celles qui sont en possession que celles qui doivent être désignées par la suite, sont égales entre elles et du même âge que A', la valeur actuelle de tous les renouvellemens à venir sera égale à

$$\frac{pn}{A'}\left(\frac{1}{\varrho}-A'\right)=pn\left(\frac{1}{\varrho A'}-1\right).$$

Corollaire 3.

218. Si l'on multiplie par le taux de l'intérêt la valeur actuelle trouvée dans l'un des corollaires précédents, on verra de quelle quantité se trouve augmenté le revenu annuel du propriétaire, en raison des primes payées à chaque renouvellement.

Ainsi dans l'exemple donné au n° **217**, on trouvera que $1032.097 \times 0,05 = 51,605$ est la somme dont se trouve augmenté le revenu du propriétaire, en raison de ces primes.

Corollaire 4.

219. Puisque la somme payée au commencement du bail, ajoutée à la valeur actuelle de toutes les primes qui doivent être payées en renouvellement, est égale à la valeur totale de la propriété ou à la perpétuité de son revenu, $(=r)$; c'est-à-dire, puisque $s+\frac{p}{A'}\left(\frac{n}{\varrho}-A-B-C-\text{etc.}\right)=r$; il s'ensuit que p, ou la prime qui doit être payée à chaque

renouvellement, sera égale à $\frac{(r - s)A'}{\frac{n}{t} - A - B - C - \text{etc.}}$:

d'où la règle suivante :

220. Retranchez la somme que le tenancier a donnée au commencement du bail de la valeur totale de la propriété, multipliez le reste par la valeur présumée d'une annuité sur la tête d'un âge moyen avec laquelle le bail est supposé renouvelé à chaque décès; et réservez ce produit. Divisez le nombre de têtes sur lequel le bail est maintenant constitué par le taux de l'intérêt, et retranchez du quotient la somme des valeurs d'une annuité sur chacune de ces têtes; si l'on divise par ce reste le produit réservé, on aura la somme qui devra être payée comme prime à chaque renouvellement.

221. *Exemple.* Supposons qu'une personne ait acheté pour 1000 fr. le ténement d'une propriété dont le rapport serait estimé 100 fr. par an, et que ce ténement soit constitué sur trois têtes, avec faculté de renouveler continuellement le bail à l'extinction d'une de ces têtes par le paiement d'une prime constante : quel devra être le montant de cette prime pour que l'intérêt ressorte à 5 p. 100? On suppose que les têtes sur lesquelles la propriété est maintenant constituée soient âgées de 30, 50 et 70 ans, et que la mortalité soit conforme aux observations de M. Deparcieux.

Ici nous aurons r, ou la valeur du revenu perpétuel de la propriété, $= 2000$, $s = 1000$, et les

autres quantités comme dans l'exemple du n° **217.** Conséquemment la valeur de la prime dev...

$\frac{1000 \times 16,213}{60 - 32,111} = 581,340.$

Corollaire 5.

222. Si la propriété repose sur une tête seulement, sa valeur actuelle, par rapport au propriétaire, sera dans tous les cas, exprimée par $p \times \frac{1 - \varrho A}{\varrho A^1}$. Or *immédiatement après* le paiement d'une prime, la tête en possession est égale à A^1, et l'expression, dans ce cas, devient $p \times \frac{1 - \varrho A^1}{\varrho A^1}$; et *immédiatement avant* le paiement d'une prime, la tête en possession étant venue à s'éteindre, l'expression, dans ce cas, devient $p \times \frac{1}{\varrho A^1}$.

Mais puisque la valeur actuelle de la première prime à payer est toujours exprimée par $p(1 - \varrho A)$, nous pourrons aisément déterminer la valeur que représente cette propriété pour son propriétaire, ou la valeur de toutes les primes payables en renouvellement, au moyen de la règle suivante :

223. Divisez la valeur actuelle de la première prime à payer par le produit du taux de l'intérêt multiplié par la valeur d'une annuité sur la tête d'un âge moyen avec laquelle on renouvelle le bail à chaque décès; le quotient sera la valeur demandée.

224. *Exemple*. Supposons que le tenancier d'une propriété ainsi constituée paie à son propriétaire une prime de 1000 fr. à son entrée en possession, et que chaque successeur en fasse autant : quelle est la valeur actuelle du ténement par rapport au propriétaire en supposant que les tenanciers successifs aient environ 25 ans à l'époque de leur admission, que l'intérêt soit de 5 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton.

Ici nous aurons $A' = 13,567$, $r = 0,05$, et $p = 1000$. Conséquemment la valeur demandée *immédiatement avant* la réception d'une prime sera égale à..... $1000 \times \frac{1}{0,05 \times 13,567} = 1474,16$. Et *immédiatement après* la réception d'une prime, elle sera égale à $1000 \times \frac{1-0,05 \times 13,567}{005 \times 13,567} = 474,16$. Mais si la tête aujourd'hui en possession avait 70 ans, nous aurions $A = 6,023$; dans ce cas, la valeur de toutes les primes serait $1000 \times \frac{1-0,05 \times 6,023}{0,05 \times 13,567} = 1030,22$.

Donc si le tenancier donne 5000 fr. pour l'entrée en bail, la valeur totale de l'achat sera, dans ce dernier cas, estimée à 6030 fr.

Corollaire 6.

225. Si le ténement est constitué jusqu'au *dernier décès* d'un nombre quelconque de têtes (c'est-à-dire à condition que lorsque *toutes* ces têtes seront éteintes le bail pourra être renouvelé avec le même nombre

de têtes et aux mêmes conditions, en payant la prime désignée), puisque toutes les têtes peuvent dans ce cas être ramenées à une seule, les formules du dernier corollaire exprimeront encore la vraie valeur du ténement pour son propriétaire; il suffira de faire A égal à la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès de toutes les têtes en possession, et A' égal à la valeur présumée d'une annuité payable jusqu'au dernier décès de toutes les têtes avec lesquelles on renouvellera le bail à chaque extinction de têtes en possession.

226. *Exemple.* Supposons qu'un ténement repose sur deux têtes, avec cette condition qu'à l'extinction de ces deux têtes il puisse être renouvelé avec deux autres têtes (les plus avantageuses qu'on pourra trouver) au moyen du paiement d'une prime de 300 fr., et ainsi de suite à perpétuité : quelle est la valeur actuelle que représente ce ténement pour le propriétaire, l'intérêt étant supposé à 5 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton?

Ici nous aurons A' (ou la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès de deux têtes, toutes deux âgées de 8 ans) $=17,721$, $\rho=0,05$, et $p=300$; donc la valeur demandée *immédiatement avant* la réception d'une prime sera

$$300 \times \frac{1}{0,05 \times 17,721} = 338,581,$$

et *immédiatement après* la réception d'une prime, elle sera 38,581. Mais si les têtes sur lesquelles repose

le ténement étaient actuellement âgées de 40 et 60 ans, la valeur demandée serait

$$300 \times \frac{1-0,05\times13,214}{0,05\times17,721} = 114,880:$$

ou si la plus âgée de ces têtes était décédée, elle serait

$$300 \times \frac{1-0,05\times11,837}{0,05\times17,721} = 138,192.$$

Scolie.

227. D'après les principes qui viennent d'être exposés, il serait facile de déterminer s'il est plus avantageux au tenancier ou au propriétaire de remplacer immédiatement chaque tête qui vient à s'éteindre, ou d'attendre qu'il y en ait deux ou plusieurs décédées avant de renouveler le bail.

CHAPITRE VIII.

ES ASSURANCES QUI DÉPENDENT D'UN ORDRE PARTICULIER DE SURVIVANCE.

228. Le sujet de ce chapitre est certainement un plus compliqués de toute la *Théorie des Annuités*, isqu'il implique des conditions pour lesquelles st très difficile de trouver une expression concise en même temps exacte. Quand il s'agit seulement deux têtes, les calculs ne sont pas très laborieux, l'on peut obtenir assez facilement une solution ivenable; mais quand la question embrasse trois es ou davantage, les calculs sont de plus en plus npliqués, et souvent même il devient impossible btenir une valeur exacte. Ces derniers cas, qui it aussi nombreux que ceux pour lesquels nous ivons trouver des solutions correctes, ressortent sujet que nous avons déjà traité dans le chapit. V, se présenteront, pour la plupart, vers la fin de ce ipitre; nous pourrons cependant approcher de leur ie valeur au moyen des deux lemmes des nos 145 152, comme on le verra plus distinctement par la te.

J'observerai ici que je n'ai considéré aucun des cas où il s'agit de plus de trois têtes; ces questions sont si rares qu'on perdrait son temps à établir des règles générales sur ce sujet : d'ailleurs il faudrait des volumes pour les traiter convenablement.

Pour éviter d'inutiles répétitions, je préviens le lecteur, une fois pour toutes, que je représenterai toujours par s la somme proposée, et les probabilités de vivre comme au n° **23**. Les formules algébriques que nous obtiendrons suffiront au calculateur exercé pour en déterminer la valeur numérique; mais elles sont trop compliquées pour que je les aie traduites en forme de règles.

229. J'observerai en outre que j'ai fait usage des caractères A', B', C', pour désigner les valeurs d'une annuité sur une tête plus *âgée* d'une année que les têtes respectives A, B ou C; et des caractères $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, pour désigner les valeurs d'une annuité sur une tête plus *jeune* d'une année que les têtes respectives A, B ou C. Conséquemment quand les caractères A'^{n}, B'^{n} ou C'^{n} se présentent, ils désignent les valeurs d'une annuité sur une tête plus âgée de n années que les têtes respectives A', B', ou C'; c'est-à-dire sur une tête plus âgée de $(n + 1)$ années que les têtes respectives A, B ou C.

Les mêmes observations s'appliquent aux caractères $A_{,}^{n}$, $B_{,}^{n}$, $C_{,}^{n}$, qui désignent respectivement les valeurs d'une annuité sur une tête plus âgée de n années que $A_{,}$ $B_{,}$ ou $C_{,}$, c'est-à-dire sur une tête plus âgée de $(n - 1)$ années que A, B ou C. Cette

remarque s'étendra aussi au cas où ces têtes sont considérées conjointement avec un nombre quelconque d'autres têtes; ainsi A′B désigne la valeur d'une annuité sur un groupe de têtes composé de B et d'une tête plus âgée que A d'une année; *A′BC* la valeur d'une annuité sur un groupe de têtes composé de B, de C et d'une autre tête plus âgée que A d'une année, et ainsi de suite.

PROBLÈME XXVII.

230. Déterminer la valeur actuelle d'une somme payable au décès de A, pourvu que de deux têtes données A, B, cette tête A soit la *première* qui s'éteigne.

SOLUTION.

La chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une année quelconque dépendra de l'un de ces deux événemens, 1°. ou A mourra dans le courant de cette année, et B existera à la fin de cette même année; 2°. ou les deux têtes mourront dans le courant de cette année, A étant mort le premier. La probabilité du premier événement est, pour la première année, $\frac{(a-a')\,b'}{ab}$, et la probabilité du second événement est, pour le même temps, $\frac{(a-a')\times(b-b')}{2ab}$, donc ces deux valeurs, ajoutées ensemble et multi-

pliées par $s(1+\rho)^{-1}$, ou la valeur actuelle de l
somme proposée, si l'on était certain de la recevoi
à la fin de l'année, donneront $\frac{s}{2}(1+\rho)^{-1}\times$
$\left(\frac{ab}{ab}-\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'b}{ab}+\frac{ab'}{ab}\right)$ pour la valeur de l'espéranc
qu'on a de recevoir cette somme à la fin de la pre-
mière année. De la même manière, puisque la pro
babilité du premier événement est, pour la second
année, $\frac{(a'-a'')b''}{ab}$, et la probabilité du second évé-
nement pour le même temps, $\frac{(a'-a'')\times(b'-b'')}{2ab}$, i
s'ensuit que la somme de ces deux expressions, mul
tipliée par $s(1+\rho)^{-2}$ donnera la valeur de l'espé
rance qu'on a de recevoir la somme à la fin de l
seconde année. Par un raisonnement semblable, nou
pourrons trouver la valeur de l'espérance qu'on a d
recevoir la somme à la fin de la troisième année, e
ainsi de suite pour toutes les autres années, jus-
qu'aux dernières limites de la vie humaine, et l
somme de toutes ces valeurs annuelles, ou la série

$$\frac{s}{2}(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{ab}{ab}-\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'b}{ab}+\frac{ab'}{ab}\right)$$
$$+\frac{s}{2}(1+\rho)^{-2}\times\left(\frac{a'b'}{ab}-\frac{a''b''}{ab}-\frac{a''b'}{ab}+\frac{a'b''}{ab}\right)$$
$$+\frac{s}{2}(1+\rho)^{-3}\times\left(\frac{a''b''}{ab}-\frac{a'''b'''}{ab}-\frac{a'''b''}{ab}+\frac{a''b'''}{ab}\right)$$
$$+\text{ etc., etc.,}$$

sera la valeur totale actuelle du capital s, dépen-
dant des circonstances ci-dessus.

231. Mais, la somme des deux premières de ces ies verticales (indépendamment du multiplicateur nmun $\frac{s}{2}$) est, d'après le problème XXII, égale $\frac{1-\rho AB}{1+\rho}$; la troisième sera trouvée égale à ... $\frac{1+A'B}{(1+\rho)}\times\frac{a'}{a}$, et la dernière à $A_{\prime}B\times\frac{a_{\prime}}{a}$. Consé- ›mment, la valeur totale actuelle du capital proposé a égale à

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\rho AB}{(1+\rho)}-\left[\frac{(1+A'B)a'}{(1+\rho)}-A_{\prime}B.a_{\prime}\right]\frac{1}{a}\right\}.$$

Comme dans les problèmes suivans on aura sou- it recours à cette formule, il sera plus commode la désigner par une expression plus simple; sup- sons donc qu'elle soit représentée par A^{B}, c'est- dire désignons par A^{B} la valeur actuelle de 1 fr., yable aux conditions énoncées dans le problème; nséquemment, $s\times A^{B}$ sera la valeur actuelle du pital proposé, dépendant des mêmes circonstances.

Corollaire 1.

232. Après avoir ainsi trouvé la valeur actuelle la somme proposée, payable si B survit à A, trouvera aisément la valeur actuelle de la même mme payable si A survit à B (c'est-à-dire payable décès de B, pourvu que A subsiste à ce décès), substituant les caractères *a*, *a'*, *a''*.... aux ca-

ractères b, b', b'',... dans la discussion ci-dessu cette valeur sera donc trouvée égale à

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho AB}{(1+\varrho)}-\left[\frac{(1+AB')b'}{1+\varrho}-AB_{,}.b_{,}\right]\frac{1}{b}\right\}.$$

Mais si la valeur actuelle de la somme proposé payable au décès de A, suivant les conditions du pr blème, est une fois déterminée, nous pourrons tro ver aisément la valeur de la même somme payal au décès de B, pourvu que cette tête soit la *premi* qui s'éteigne, en retranchant la valeur trouvée p le problème, de la valeur actuelle du capital pr posé, payable à la dissolution du groupe de têtes A comme nous l'avons trouvée par le problème XX ce qui revient à changer le signe du second ter dans l'expression générale du problème. Ains

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho AB}{(1+\varrho)}+\left[\frac{(1+A'B)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}B.a_{,}\right]\frac{1}{a}\right\}$$

désignera aussi la valeur actuelle du capital propos payable si A survit à B (1).

---

(1) On voit ainsi que l'expression

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho AB}{1+\varrho}\mp\left[\frac{(1+A'B)a'}{1+\varrho}-A_{,}B.a_{,}\right]\frac{1}{a}\right\}$$
$$=\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho AB}{1+\varrho}\pm\left[\frac{(1+AB')b'}{1+\varrho}-AB_{,}.b_{,}\right]\frac{1}{b}\right\}$$

exprime, dans l'un ou l'autre cas, la valeur demandée :

Comme cette formule se rencontrera souvent dans es problèmes suivans, il sera plus commode de la lésigner par une expression plus simple; supposons lonc qu'elle soit représentée par B^A, c'est-à-ire, désignons par B^A la valeur actuelle de 1 fr., ayable aux conditions énoncées dans le problème; onséquemment, $s \times B^A$ désignera la valeur actuelle lu capital proposé, dépendant des mêmes circonsances.

Corollaire 2.

233. Au moyen des principes exposés dans le problème, nous pourrons trouver aisément la valeur actuelle d'une somme quelconque dépendant de la condition que C survive à A, c'est-à-dire payable à la mort de A, pourvu que de deux têtes A, C, ce soit cette tête A qui s'éteigne la première. La valeur de cette somme sera égale à

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho AC}{(1+\varrho)}\left[-\frac{(1+A'C)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}C.a_{,}\right]\frac{1}{a}\right\},$$

formule que, pour les raisons énoncées ci-dessus, je représenterai par $s \times A^C$.

De la même manière, la valeur d'un capital quelconque, dépendant de la condition que C survive

---

signe supérieur se rapporte à la condition du prédécès de A, et le signe inférieur à la condition du prédécès de B.

à B, sera trouvée égale à

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho BC}{(1+\varrho)}-\left[\frac{(1-B'C)b'}{(1+\varrho)}-B_{,}C.b_{,}\right]\frac{1}{b}\right\},$$

que, pour les mêmes raisons, je désignerai par $s\times B^{C}$. Ces formules se présenteront souvent dans les problèmes suivans.

Corollaire 3.

234. Si la condition mentionnée dans le problème, et dont dépend le capital proposé, est *différée* d'un nombre quelconque d'années n, moindre que la durée possible de l'existence simultanée des deux têtes, il est évident que les diverses séries verticales de l'expression générale donnée à la page 155 doivent être prises à partir du $n^{ième}$ terme seulement, et continuer alors jusqu'aux dernières limites de la vie humaine. La somme de ces termes, en opérant de la même manière que dans le probl. XXII, corollaire 1, sera trouvée égale à

$$\frac{s}{2}\left[\frac{1-\varrho A^{o}B^{o}}{(1+\varrho)}\times\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}-\frac{1+A'^{o}B^{o}}{(1+\varrho)}\times\frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}+A_{,}^{o}B^{o}\times\frac{\alpha_{,}\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}\right]$$
$$=\frac{s\beta}{2ab}(1+\rho)^{-(n+1)}\times\left[(1-\rho A^{o}B^{o})\alpha-(1+A'^{o}B^{o})\alpha'+A_{,}^{o}B^{o}(1+\rho)\alpha_{,}\right],$$

expression que je désignerai par $s\times(A^{B})^{d}$.

Corollaire 4.

235. Ou bien, si la condition dont dépend le paiement de la somme donnée, est *temporaire* (c'est-à-dire si elle doit durer seulement pendant un espace de temps fixé n, moindre que la durée possible de l'existence simultanée des deux têtes), il est évident que les différentes séries verticales de l'expression générale donnée à la page 155 ne doivent être continuées que jusqu'à n termes seulement, et leur somme, en opérant de la même manière que que dans le probl. XXII, cor. 2, sera trouvée égale à

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1+(AB)^{t-1}}{(1+\varrho)}-(AB)^{t}-\left[\frac{1+(A'B)^{t-1}}{(1+\varrho)}.a'-(A_{,}B)^{t}.a_{,}\right]\frac{1}{a}\right\}.$$

Mais, puisque

$$(A'B)^{t-1}+\frac{\alpha'\beta}{a'b(1+\varrho)^{n}}=(A'B)^{t}$$

$$=A'B-A'^{\circ}B^{\circ}\times\frac{\alpha'\beta}{a'b}(1+\rho)^{-n},$$

nous pouvons (en substituant ces valeurs de la même manière que dans le problème XXII), rendre cette formule plus convenable pour la pratique, par l'expression suivante :

$$\frac{s}{2}\left[\frac{1-\varrho AB}{(1+\varrho)}-\frac{1-\varrho A^{\circ}B^{\circ}}{(1+\varrho)}\times\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}-\frac{1+A'B}{(1+\varrho)}.\frac{a'}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{1+A'^{\circ}B^{\circ}}{(1+\varrho)}.\frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}+A_{,}B.\frac{a_{,}}{a}-A_{,}^{\circ}B^{\circ}.\frac{\alpha_{,}\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}\right]$$

$=s.A^{B}-s.(A^{B})^{d}$, c'est-à-dire égale à la différence

qui existe entre la valeur actuelle du capital, trouvée dans le problème, et la valeur actuelle du même capital, différé comme dans le corollaire précédent.

Corollaire 5.

236. Si les deux têtes sont égales entre elles, ou du même âge que A, l'expression générale du problème devient égale à $\frac{s}{2} \times \frac{1 - \varrho AA}{(1+\varrho)}$, parce que le second terme de cette expression, ou

$$\frac{1}{a}\left[\frac{(1 + A'A)a'}{(1+\varrho)} - A_{,}A\,.\,a_{,}\right]$$

s'évanouit entièrement; d'où il suit, que, dans ce cas la valeur est égale à la moitié de la valeur actuelle de la somme proposée, payable à la dissolution du groupe des deux têtes.

Cette observation s'appliquera également aux formules des deux derniers corollaires, pour les assurances *différées* ou *temporaires*, et cela est évident par soi-même. Car puisque le capital assuré n'est payable qu'après la dissolution du groupe des deux têtes, et comme il y a certainement chance égale pour chacune d'elles de survivre à l'autre, il est évident que la moitié de la valeur actuelle du capital, payable à la dissolution de ce groupe de têtes, sera la vraie valeur actuelle du capital dépendant de cette condition restrictive, soit que cette condition s'étende à

toute la durée de la vie, ou seulement à un laps de temps déterminé.

Observations sur la méthode dont M. Morgan s'est servi pour résoudre ce problème.

237. Je ne puis passer outre sans faire quelques observations sur la manière singulière dont M. Morgan a additionné les quatre séries verticales de la page 155, qui expriment la valeur actuelle du capital désigné, payable aux conditions mentionnées dans le problème, et je suis d'autant plus porté à le faire, que de semblables expressions se présentent dans la plupart des problèmes suivans, et qu'il a adopté pour tous la même méthode bizarre et embarrassée, de sorte qu'il a répandu sur toutes ces questions une obscurité que je vais m'efforcer de faire disparaître. M. Morgan partage toute l'expression en deux séries collatérales, qui sont :

$$\frac{s}{2(1+\varrho)}\left[\frac{(a-a')b'}{ab}+\frac{(a-a')b}{ab}\right]$$
$$+\frac{s}{2(1+\varrho)^2}\left[\frac{(a'-a'')b''}{ab}+\frac{(a'-a'')b'}{ab}\right]$$
$$+\frac{s}{2(1+\varrho)^3}\left[\frac{(a''-a''')b'''}{ab}+\frac{(a''-a''')b''}{ab}\right]$$
$$+\quad \text{etc.}, \qquad \text{etc.},$$

et forment évidemment la même série que celle que j'ai donnée à la page 155.

238. Il remplace la première de ces séries verticales par une autre plus compliquée, en la faisant égale à

$$\frac{s}{2(1+\varrho)}\left[\frac{b'}{b}-\frac{a'b'}{ab}\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$
$$+\frac{s}{2(1+\varrho)^2}\left[\frac{b''}{b}-\frac{a''b''}{ab}-\frac{b''}{b}+\frac{a'b''}{ab}\right]$$
$$+\frac{s}{2(1+\varrho)^3}\left[\frac{b'''}{b}-\frac{a'''b'''}{ab}-\frac{b'''}{b}+\frac{a''b'''}{ab}\right]$$
$$+\ \text{etc.,}\qquad\text{etc.,}\qquad\text{etc.,}$$

et alors il procède à l'addition de ces dernières séries verticales de la manière suivante. Il fait la première (indépendamment du multiplicateur commun $\frac{s}{2}$), égale à B, la seconde égale à $-AB$, la troisième égale à $-\frac{B'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}$, et la quatrième égale à $\frac{AB'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}$, de manière que la valeur totale de ces quatre séries verticales (ou de la première de celles de la page 163) devient égale à

$$B-\frac{B'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}+\frac{AB'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}-AB.$$

En opérant de la même manière pour la seconde série verticale de la page 163, on trouve que la somme en est égale à $B_{,}\times\frac{b_{,}}{b}-\frac{B}{(1+\varrho)}-AB_{,}\times\frac{b_{,}}{b}+\frac{AB}{(1+\varrho)}$. Conséquemment, la valeur totale actuelle du capital désigné payable aux conditions mentionnées dans le problème, est égale à $\frac{s}{2}\Big[B_{,}\times\frac{b_{,}}{b}-\frac{B}{(1+\varrho)}+\frac{AB}{(1+\varrho)}$

$$-AB+B-\frac{B'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}+\frac{AB'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}-AB_{,}\frac{b_{,}}{b}\Big].$$

239. Mais, assurément, il est inutile de dire à M. Morgan que $B-\frac{B'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}$ est égal à $\frac{1}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}$, et que $B_{,}\times\frac{b_{,}}{b}-\frac{B}{(1+\varrho)}$ est égal à $\frac{1}{(1+\varrho)}$ seulement. Donc la formule si gênante et si compliquée donnée ci-dessus peut être représentée plus simplement par $\frac{s}{2}\left[\frac{1-\varrho AB}{(1+\varrho)}+\frac{1+AB'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{b}-AB_{,}\times\frac{b_{,}}{b}\right]$, c'est-à-dire par une des formules que j'ai donnée dans la note de la page 158. En vérité, on ne conçoit pas facilement comment il a toujours jugé nécessaire de se servir des quantités qui désignent la valeur d'une annuité sur une seule tête, puisqu'il est clair, par la nature même des différentes séries de la page 163, que ces valeurs ne peuvent pas appartenir au sujet, et que la solution du problème n'implique pas d'autres quantités que celles qui se rapportent aux groupes de deux têtes.

Comme cette étrange erreur se reproduit dans tous les mémoires que M. Morgan a insérés dans les *Transactions philosophiques*, relativement à ces chances et à d'autres semblables, j'ai pensé bien faire en publiant ces remarques, non-seulement pour prévenir les difficultés qui pourraient résulter de la comparaison de ses formules avec celles que j'ai exposées ici, mais aussi pour dégager ces questions de tout ce qui n'y est pas essentiellement lié. Par la suite, j'aurai occasion de faire de semblables re-

marques sur sa méthode d'additionner les diverses séries où il s'agit de *trois* têtes ; voyez les observations du n° **251**, etc., à la du problème XXIX, et du n° **272**, à la fin du problème XXXV.

PROBLÈME XXVIII.

240. Déterminer la valeur actuelle d'une somme payable au décès de A, pourvu que de deux têtes données A, B, cette tête A soit la *dernière* qui s'éteigne.

SOLUTION.

Il est évident, dans ce cas, que la chance qu'on a de recevoir le capital à la fin de la première année, dépendra d'une seule circonstance, je veux dire, que les deux têtes soient éteintes dans ce laps de temps, avec la condition que A soit mort le dernier; la probabilité de cet événement, pour la première année, est $\frac{(a-a')(b-b')}{2ab}$, qui, étant multiplié par $s(1+\rho)^{-1}$, ou la valeur actuelle du capital proposé, payable d'une manière certaine à la fin de l'année, donnera $\frac{s}{2}(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{ab}{ab}+\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'b}{ab}-\frac{ab'}{ab}\right)$ pour l'espérance qu'on a de recevoir ce capital à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la chance qu'on a de recevoir la somme, dépend de

l'un ou de l'autre de ces deux événemens, 1°. ou les deux têtes seront mortes dans l'année, A étant mort le dernier; 2°. ou seulement A sera mort dans cette année, et B dans une des années précédentes. La probabilité du premier événement est, pour la seconde année, $\frac{(a'-a'')(b'-b'')}{2ab}$, et la probabilité du second est, pour le même temps, $\frac{a'-a''}{a}\left(1-\frac{b'}{b}\right)$. Donc ces deux valeurs ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$ donneront

$$\frac{s}{2}(1+\rho)^{-2}\times\left(\frac{2a'}{a}-\frac{2a''}{a}-\frac{a'b'}{ab}+\frac{a''b''}{ab}+\frac{a''b'}{ab}-\frac{a'b''}{ab}\right)$$

pour l'espérance qu'on a de recevoir le capital à la fin de la seconde année.

De la même manière, on trouvera que la probabilité du premier événement est, pour la troisième année, $\frac{(a''-a''')(b''-b''')}{2ab}$, et la probabilité du second événement, pour le même temps, $\frac{a''-a'''}{a}\left(1-\frac{b''}{b}\right)$; donc ces deux valeurs, ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-3}$, donneront

$$\frac{s}{2}(1+\rho)^{-3}\times\left(\frac{2a''}{a}-\frac{2a'''}{a}-\frac{a''b''}{ab}+\frac{a'''b'''}{ab}+\frac{a'''b''}{ab}-\frac{a''b'''}{ab}\right)$$

pour l'espérance que l'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année, et ainsi de suite pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine; et la somme de toutes ces valeurs

annuelles, ou la série

$$(1)\frac{s}{2}(1+\varrho)^{-1}\times\left(\frac{2a}{a}-\frac{2a'}{a}-\frac{ab}{ab}+\frac{a'b'}{ab}+\frac{a'b}{ab}-\frac{ab'}{ab}\right)$$
$$+\frac{s}{2}(1+\varrho)^{-2}\times\left(\frac{2a'}{a}-\frac{2a''}{a}-\frac{a'b'}{ab}+\frac{a''b''}{ab}+\frac{a''b'}{ab}-\frac{a'b''}{ab}\right)$$
$$+\frac{s}{2}(1+\varrho)^{-3}\times\left(\frac{2a''}{a}-\frac{2a'''}{a}-\frac{a''b''}{ab}+\frac{a'''b'''}{ab}+\frac{a'''b''}{ab}-\frac{a''b'''}{ab}\right)$$
$$+\quad \text{etc.,}\quad \text{etc.,}\quad \text{etc.,}\quad \text{etc.,}$$

sera la valeur totale actuelle du capital s payable aux conditions du problème.

241. Mais la somme des deux premières de ces séries verticales est, d'après le problème XXII, égale à la valeur actuelle du capital proposé, payable au décès de A, c'est-à-dire égale à $s\left[\frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)}\right]$, et les quatre autres séries verticales sont les mêmes, avec un signe contraire, que celles du dernier problème, dont la somme a été représentée par

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho AB}{(1+\varrho)}-\left[\frac{(1+A'B)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}B.a_{,}\right]\frac{1}{a}\right\}.$$

Conséquemment, la valeur totale de ces différentes séries sera exprimée par $s\left[\frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)}-A^{B}\right]$.

---

(1) Cette expression est évidemment égale à celle que nous avons trouvée page 166 pour l'espérance de la première année.

Corollaire 1.

242. Après avoir ainsi trouvé la valeur actuelle ı capital proposé, payable si A meurt après B, ı pourra trouver aisément la valeur actuelle du ıême capital payable si B meurt après A, c'est-à-ire payable à la mort de B, pourvu que A soit ıort antérieurement, en retranchant la valeur trou-ée ci-dessus de la valeur actuelle du capital pro-osé, payable au dernier décès des deux têtes. On vu, dans le problème XXII, corollaire 3, que cette aleur est exprimée par $s \times \frac{1-\varrho(A+B-AB)}{(1+\varrho)}$. Donc, a valeur actuelle du capital proposé, payable si B neurt après A, sera égale à

$$\frac{s}{2}\left\{\frac{1-\varrho(2B-AB)}{(1+\varrho)}-\left[\frac{(1+A'B)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}Ba_{,}\right]\frac{1}{a}\right\}$$
$$=s\left[\frac{1-\varrho B}{(1+\varrho)}-B^{A}\right].$$

Corollaire 2.

243. Si la condition dont dépend le paiement du ıpital assuré est *différée* d'un nombre d'années n, ıoindre que la durée possible de l'existence de la te A, il est évident que la somme de tous les rmes des deux premières séries verticales, après ı $n^{ième}$ année, sera, d'après le problème XXII, co-

rollaire 1, égale à $s \times \frac{1-\varrho A^{\circ}}{(1+\varrho)} \times \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}$, et la somme de tous les termes semblables des quatre autres séries verticales sera représentée par l'expression du second corollaire du problème précédent, prise en signe contraire. Donc, si l'on retranche la valeur trouvée par ce corollaire, de la valeur actuelle de l'assurance du capital proposé payable à l'extinction de A, pourvu qu'elle n'ait lieu qu'après le terme donné, la différence sera la valeur demandée.

Corollaire 3.

244. Si la condition dont dépend le paiement du capital assuré, commence à courir immédiatement, mais ne doit durer qu'un nombre d'années déterminé n, moindre que la durée possible de la vie de A, ou, en d'autres termes, si nous voulons déterminer la valeur d'une assurance *temporaire* de ce capital; il est évident que les diverses séries verticales données dans le problème doivent être continuées seulement jusqu'à n termes. Or la somme des n premiers termes des deux premières de ces séries verticales sera, d'après le problème XXII, corol. 2, trouvée égale à

$$\frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)} - \frac{1-\varrho A^{\circ}}{(1+\varrho)} \times \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n},$$

donc si nous en retranchons les n premiers termes des quatre séries restantes, comme nous les avons trouvés par le corol. 4 du problème précédent,

la différence sera la valeur de l'assurance temporaire demandée.

Corollaire 4.

245. Si les deux têtes sont égales ou du même âge que A, l'expression générale du problème devient égale, d'après ce qui a déjà été dit dans le corollaire 5 du problème précédent, à

$$\frac{s}{2} \times \frac{1 - \varrho(2A - AA)}{(1 + \varrho)};$$

c'est-à-dire égale à la moitié de la valeur du capital désigné, payable au dernier décès des deux têtes.

PROBLÈME XXIX.

246. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que de trois têtes données A, B, C, cette tête A soit la *première* qui s'éteigne.

SOLUTION.

Pour qu'on reçoive le capital proposé à la fin d'une année quelconque, il est nécessaire que l'un ou l'autre de quatre différens événemens s'accomplisse : 1°. ou toutes les têtes s'éteindront dans l'année, A étant mort le premier; 2°. ou A et B mourront dans l'an-

née, A étant mort le premier et C étant encore vivant à la fin de cette année ; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A étant mort le premier et B étant encore vivant à la fin de cette année; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C seront encore vivans à la fin de cette année. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont, pour la première année,

$$\frac{(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc},\quad \frac{(a-a')(b-b')c'}{2abc},$$
$$\frac{(a-a').(c-c')b'}{2abc} \quad \text{et} \quad \frac{(a-a')b'c'}{abc};$$

et si on les ajoute ensemble et qu'on les multiplie par $s(1+\rho)^{-1}$, on trouvera

$$\frac{s}{6}(1+\rho)^{-1}\times\left(\frac{2abc}{abc}-\frac{2a'b'c'}{abc}-\frac{2a'bc}{abc}+\frac{2ab'c'}{abc}+\frac{ab'c}{abc}-\frac{a'bc'}{abc}+\frac{abc'}{abc}-\frac{a'b'c}{abc}\right)$$

pour l'espérance qu'on a de recevoir le capital à la fin de la première année.

De la même manière, on verra que les probabilités respectives de ces différens événemens sont, pour la seconde année,

$$\frac{(a'-a'')(b'-b'')(c'-c'')}{3abc},\quad \frac{(a'-a'')(b'-b'')c''}{2abc},$$
$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc} \quad \text{et} \quad \frac{(a'-a'')b''c''}{abc};$$

si on les ajoute ensemble et qu'on les multiplie par $s(1+\rho)^{-2}$, on aura l'espérance qu'on a de recevoir

somme à la fin de la seconde année. Par un rai-
ınementsemblable, on trouvera les espérances qu'on
le recevoir la somme à la fin de la troisième année,
de toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières
ıites de la vie humaine; la somme de toutes ces
eurs annuelles, ou la série

$$\left(\frac{2abc}{abc} - \frac{2a'b'c'}{abc} - \frac{2a'bc}{abc} + \frac{2ab'c'}{abc} + \frac{ab'c}{abc} - \frac{a'bc'}{abc} + \frac{abc'}{abc} - \frac{a'b'c}{abc}\right)$$
$$\left(\frac{2a'b'c'}{abc} - \frac{2a''b''c''}{abc} - \frac{2a''b'c'}{abc} + \frac{2a'b''c''}{abc} + \frac{a'b''c'}{abc} - \frac{a''b'c''}{abc} + \frac{a'b'c''}{abc} - \frac{a''b''c'}{abc}\right)$$
$$\left(\frac{2a''b''c''}{abc} - \frac{2a'''b'''c'''}{abc} - \frac{2a'''b''c''}{abc} + \frac{2a''b'''c'''}{abc} + \frac{a''b'''c''}{abc} - \frac{a'''b''c'''}{abc} + \frac{a''b''c'''}{abc} - \frac{a'''b'''c''}{abc}\right)$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

a la valeur totale actuelle du capital proposé,
rable aux conditions du problème.

247. Or les sommes de ces huit séries verticales,
lépendamment du multiplicateur commun s, sont
pectivement égales à

$$\frac{1+ABC}{3(1+\varrho)} - \frac{ABC}{3} - \frac{1+A'BC}{3(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a} + A_{,}BC\cdot\frac{a_{,}}{3a}$$
$$\frac{1+AB'C}{6(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b} - AB_{,}C\cdot\frac{b_{,}}{6b} + \frac{1+ABC'}{6(1+\varrho)}\cdot\frac{c'}{c} - ABC_{,}\cdot\frac{c_{,}}{6c}.$$

ıù l'on voit que la somme de la première et de la
onde est, d'après le problème XXII, égale à

$$\frac{s}{3} \times \frac{1-\varrho ABC}{(1+\varrho)};$$

somme de la troisième et de la quatrième est

égale à

$$-\frac{s}{3a}\left[\frac{(1+A'BC)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}BC.a_{,}\right];$$

la somme de la cinquième et de la sixième est égale à

$$\frac{s}{6b}\left[\frac{(1+AB'C)b'}{(1+\varrho)}-AB_{,}C.b_{,}\right],$$

et la somme de la septième et de la huitième est égale à

$$\frac{s}{6c}\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)}-ABC_{,}.c_{,}\right].$$

Conséquemment, la valeur totale actuelle du capital, payable aux conditions ci-dessus mentionnées, sera égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho ABC}{3(1+\varrho)}-\frac{1}{3a}\left[\frac{(1+A'BC)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}BC.a_{,}\right],$$
$$+\frac{1}{6b}\times\left(\frac{(1+AB'C)b'}{(1+\varrho)}-AB_{,}C.b_{,}\right)$$
$$+\frac{1}{6c}\left(\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)}-ABC_{,}.c_{,}\right).$$

Comme cette formule se reproduira souvent dans le cours des problèmes suivans, il conviendra de la représenter par une expression plus simple; supposons donc qu'elle soit représentée par A^{BC}, c'est-à-dire désignons par A^{BC} la valeur actuelle de 1 fr. payable aux conditions ci-dessus; par conséquent $s\times A^{BC}$ désignera la valeur actuelle du capital proposé dépendant des mêmes circonstances.

Corollaire 1.

248. Si l'on voulait trouver la valeur actuelle du pital, payable au décès de la tête B, pourvu qu'elle it la première qui s'éteigne de trois têtes données, us pourrions facilement obtenir cette valeur en bstituant A à B et B à A dans la solution du proème. De cette manière on trouvera que la valeur tuelle demandée est égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho ABC}{3(1+\varrho)}+\frac{1}{6a}\left(\frac{(1+A'BC)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}BC.a_{,}\right)$$
$$-\frac{1}{3b}\left(\frac{(1+AB'C)b'}{(1+\varrho)}-AB_{,}C.b_{,}\right)$$
$$+\frac{1}{6c}\left(\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)}-ABC_{,}.c_{,}\right)=B^{AC}.$$

'ar un procédé semblable on trouvera que la valeur ctuelle du capital, payable au décès de la tête C, ourvu qu'elle soit la première qui s'éteigne des trois êtes données, est égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho ABC}{3(1+\varrho)}+\frac{1}{6a}\left(\frac{(1+A'BC)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}BC.a_{,}\right)$$
$$+\frac{1}{6b}\left(\frac{(1+AB'C)b'}{(1+\varrho)}-AB_{,}C.b_{,}\right)$$
$$-\frac{1}{3c}\left(\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)}-ABC_{,}.c_{,}\right)=C^{AB}.$$

Comme ces formules pourront être utiles par la suite, j'ai jugé convenable de les insérer ici.

Corollaire 2.

249. Si les trois têtes sont égales, ou du même âge que A, les trois derniers termes de chacune des expressions ci-dessus se détruisent l'un l'autre, et la formule se réduit alors à $\frac{s}{3} \times \frac{1 - \varrho AAA}{(1 + \varrho)}$, expression égale au tiers de la valeur actuelle du capital désigné, payable à la dissolution du groupe des trois têtes.

Corollaire 3.

250. Si la condition dont dépend le paiement du capital assuré ne doit durer qu'un temps donné *n*, la valeur actuelle de ce capital sera égale à la somme des *n* premiers termes des diverses séries données dans le problème, et le moyen de la déterminer est suffisamment indiqué par les exemples des problèmes précédens.

Observations sur la manière dont M. Morgan a résolu ce problème.

251. Les raisons qui m'ont porté, à la page 163, à examiner l'étrange méthode qu'a employée M. Morgan pour ajouter les diverses séries qui proviennent de la

discussion du problème XXVII, expliquent suffisamment au lecteur pourquoi je vais encore critiquer la manière non moins diffuse et obscure qu'il a aussi adoptée pour l'addition des diverses séries provenant de la discussion du problème dont nous nous occupons actuellement.

En examinant les séries de la page 173, on verra qu'elles peuvent être présentées de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&\frac{s}{(1+\rho)}\left[\frac{(a-a')bc}{3abc}+\frac{(a-a')b'c}{6abc}+\frac{(a-a')bc}{6abc}+\frac{(a-a')b'c'}{3abc}\right]\\
+&\frac{s}{(1+\rho)^2}\left[\frac{(a'-a'')b'c'}{3abc}+\frac{(a'-a'')b''c'}{6abc}+\frac{(a'-a'')b'c''}{6abc}+\frac{(a'-a'')b''c''}{3abc}\right]\\
+&\frac{s}{(1+\rho)^3}\left[\frac{(a''-a''')b''c''}{3abc}+\frac{(a''-a''')b'''c''}{6abc}+\frac{(a''-a''')b''c'''}{6abc}+\frac{(a''-a''')b'''c'''}{3abc}\right]\\
+&\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

et c'est la manière dont M. Morgan a jugé convenable de représenter la valeur actuelle du capital proposé, payable aux conditions mentionnées dans le problème.

252. Voici de quelle manière il ajoute ces quatre séries verticales.

Il développe la première en celle-ci :

$$
\begin{aligned}
&\frac{s}{(1+\rho)}\left(\frac{bc}{3bc}-\frac{a'bc}{3abc}\cdots\cdots\cdots\cdots\right)\\
+&\frac{s}{(1+\rho)^2}\left(\frac{b'c'}{3bc}-\frac{a''b'c'}{3abc}-\frac{b'c'}{3bc}+\frac{a'b'c'}{3abc}\right)\\
+&\frac{s}{(1+\rho)^3}\left(\frac{b''c''}{3bc}-\frac{a'''b''c''}{3abc}-\frac{b''c''}{3bc}+\frac{a''b''c''}{3abc}\right)\\
+&\qquad\text{etc.,}\qquad\qquad\text{etc.,}\qquad\qquad\text{etc.,}
\end{aligned}
$$

dont il égale la somme (indépendamment du multiplicateur commun $\frac{s}{3}$) à $B_{,}C_{,} \times \frac{b_{,}c_{,}}{bc} - AB_{,}C_{,} \times \frac{b_{,}c_{,}}{bc} - \frac{BC}{(1+\varrho)} + \frac{ABC}{(1+\varrho)}$.

En opérant de la même manière, il égale la seconde série verticale du n° **251** (indépendamment du multiplicateur commun $\frac{s}{6}$) à $BC_{,} \times \frac{c_{,}}{c} - ABC_{,} \times \frac{c_{,}}{c} - \frac{B'C}{(1+\varrho)} \times \frac{b'}{b} + \frac{AB'C}{(1+\varrho)} \times \frac{b'}{b}$; la troisième à $B_{,}C \times \frac{b_{,}}{b} - AB_{,}C \times \frac{b_{,}}{b} - \frac{BC'}{(1+\varrho)} \times \frac{c'}{c} + \frac{ABC'}{(1+\varrho)} \times \frac{c'}{c}$, et la quatrième à $BC - ABC - \frac{B'C'}{(1+\varrho)} \times \frac{b'c'}{bc} + \frac{AB'C'}{(1+\varrho)} \times \frac{b'c'}{bc}$. Conséquemment, la somme des quatre séries verticales du n° **251** (ou la valeur totale actuelle du capital payable aux conditions stipulées dans le problème), sera trouvée égale, comme il l'observe, à s multiplié par

$$B_{,}C_{,} \times \frac{b_{,}c_{,}}{3bc} - AB_{,}C_{,} \times \frac{b_{,}c_{,}}{3bc} - \frac{BC}{3(1+\varrho)} + \frac{ABC}{3(1+\varrho)} + BC_{,} \times \frac{c_{,}}{6b} - ABC_{,} \times \frac{c_{,}}{6c} - \frac{B'C}{(1+\varrho)} \times \frac{b'}{6b} + \frac{AB'C}{(1+\varrho)} \times \frac{b'}{6b} + B_{,}C \times \frac{b_{,}}{6b} - AB_{,}C \times \frac{b_{,}}{6b} - \frac{BC'}{(1+\varrho)} \times \frac{c'}{6c} + \frac{ABC'}{(1+\varrho)} \times \frac{c'}{6c} + \frac{BC}{3} - \frac{ABC}{3} - \frac{B'C'}{(1+\varrho)} \times \frac{b'c'}{3bc} + \frac{AB'C'}{(1+\varrho)} \times \frac{b'c'}{3bc}.$$

253. Maintenant, en donnant un moment d'attention aux différens degrés de l'opération, on se

convaincra que toutes les quantités qui impliquent *deux têtes réunies*, sont introduites *sans nécessité*, dans la formule ci-dessus; car elles se détruisent évidemment les unes les autres. En effet,

$$B_{,}C_{,} \times \frac{b_{,}c_{,}}{bc} - \frac{BC}{(1+\varrho)} = \frac{1}{(1+\varrho)},$$
$$BC_{,} \times \frac{c_{,}}{c} - \frac{B'C}{(1+\varrho)} \times \frac{b'}{b} = \frac{b'}{b(1+\varrho)},$$
$$B_{,}C \times \frac{b_{,}}{b} - \frac{BC'}{(1+\varrho)} \times \frac{c'}{c} = \frac{c'}{c(1+\varrho)},$$
$$BC - \frac{B'C'}{(1+\varrho)} \times \frac{b'c'}{bc} = \frac{b'c'}{bc(1+\varrho)};$$

d'où la formule si compliquée donnée par M. Morgan peut se réduire à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho ABC}{3(1+\varrho)} + \frac{1}{3bc}\left[\frac{(1+AB'C')b'c'}{(1+\varrho)} - AB_{,}C_{,}.b_{,}c_{,}\right] + \frac{1}{6b}\left[\frac{(1+AB'C)b'}{(1+\varrho)} - AB_{,}C.b_{,}\right] + \frac{1}{6c}\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)} - ABC_{,}.c_{,}\right].$$

C'est absolument la même que celle que nous avons trouvée à la page 174; excepté le second terme

$$+\frac{1}{3bc}\left[\frac{(1+AB'C')b'c'}{(1+\varrho)} - AB_{,}C_{,}.b_{,}c_{,}\right],$$

que l'on a substitué à son égal

$$-\frac{1}{3a}\left[\frac{(1+A'BC)a'}{(1+\varrho)} - A_{,}BC.a_{,}\right].$$

On voit donc clairement que la formule de M. Morgan comprend un nombre de termes double de celui qui est nécessaire pour résoudre le problème; ce qui fait que non-seulement elle est compliquée de quantités inutiles, mais encore sujette à beaucoup d'erreurs dans la traduction arithmétique. Il est, de plus, évident, par la nature même de la série de la page 173, que ce n'est que fort improprement qu'on a pu y introduire des expressions impliquant deux têtes réunies, et il est singulier que cette considération n'ait pas porté M. Morgan (s'il se proposait pour objet d'éclairer et d'instruire), à repasser tous les degrés de son opération, pour la rendre à la fois plus simple et plus claire.

254. Mais il y a une autre partie de la solution de M. Morgan sur laquelle je juge également nécessaire de faire quelques observations. Il prétend que la formule qu'il a trouvée, comme nous l'avons vu plus haut, « donne la valeur exacte lorsque B ou C » est la plus vieille des trois têtes; mais que quand A » est la plus vieille, il devient *nécessaire* de chan- » ger les caractères, etc. », et il a donné une autre formule pour résoudre le problème dans ce cas, avec d'*autres* caractères qui rendent la solution encore plus confuse. De tout cela il ressortirait que la première formule n'est pas applicable au second cas.

Mais la seconde formule qu'il a donnée est encore *la même* (quoique embarrassée des quantités étrangères et inutiles dont nous avons parlé plus haut),

que celle que j'ai donnée à la page 174, si ce n'est qu'il a remplacé le dernier terme

$$+\frac{1}{6c}\times\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\rho)}-ABC_{,}.c_{,}\right]$$

par son égal

$$-\frac{1}{6ab}\left[\frac{(1+A'B'C)a'b'}{(1+\rho)}-A_{,}B_{,}C.a_{,}b_{,}\right],$$

et il sera peut-être utile de remarquer que la formule que j'ai donnée à la page 174 est *universellement* vraie, et ne dépend pas des relations d'âge des têtes proposées. Les substitutions mentionnées ci-dessus sont des arrangemens purement arbitraires pour la solution numérique du problème, dont on peut se servir ou non, au choix du calculateur.

255. Il est aisé de voir, d'après ce qui vient d'être dit, que la formule qui désigne la valeur du capital dépendant de la condition énoncée dans le problème, peut être présentée de trois différentes manières, selon qu'on ajoute différemment les diverses séries verticales données à la page 173. Mais il n'est nullement nécessaire, ni même utile, de représenter ces trois diverses méthodes. M. Morgan, après bien des longueurs et de la confusion, en a démontré seulement *deux*, mais en s'efforçant ainsi d'éclaircir la question, il l'a certainement rendue plus confuse encore. On doit blâmer toujours l'introduction de quantités inutiles dans la discussion d'un

problème, surtout lorsqu'on les conserve dans les formules qui en résultent; et des changemens capricieux dans les caractères employés sont également condamnables, non-seulement comme contraires au véritable but de la science, dont l'objet est d'instruire et non de proposer des énigmes, mais aussi comme détruisant l'ordre et l'harmonie dans les raisonnemens mathématiques.

J'ai jugé convenable de faire ici ces observations, parce que ce problème est d'une importance considérable pour nous aider à résoudre plusieurs des questions suivantes, et que M. Morgan y a eu recours lui-même; ainsi les remarques que j'ai faites ici s'appliqueront également aux problèmes que M. Morgan a déduits de celui-ci. En vérité, je ne crois pas qu'on *puisse trouver un seul problème* traité par lui dans les *Transactions philosophiques*, sur la valeur des assurances conditionnelles, pour lequel il n'ait pas adopté dans la discussion cette méthode prolixe et confuse.

PROBLÈME XXX.

256. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que de trois têtes données A, B, C, cette tête A soit la *seconde* qui s'éteigne.

SOLUTION.

La somme peut être reçue à la fin de la première année, si l'un de ces trois différens événemens a

ieu, 1°. ou les trois têtes s'éteindront dans l'année, A étant mort le second; 2°. ou A et B mourront dans l'année, A étant mort le dernier, et C vivant encore à la fin de cette année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A étant mort le dernier et B vivant encore à la fin de cette année. Les probabilités de ces divers événemens sont respectivement

$$\frac{(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc}, \frac{(a-a').(b-b')c'}{2abc} \text{ et } \frac{(a-a').(c-c').b'}{2abc},$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme désignée peut être reçue si l'un quelconque de ces sept différens événemens a lieu; 1°. ou toutes les trois têtes s'éteindront dans l'année, A étant mort le second; 2°. ou A et B mourront dans l'année, A étant mort le dernier et C vivant encore à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le dernier et B vivant encore à la fin de l'année; 4°. ou A et B seront morts dans l'année, B mourant le dernier et C étant mort dans l'une des années précédentes; 5°. ou A et C seront morts dans l'année, C mourant le dernier, et B étant mort dans l'une des années précédentes; 6°. ou seulement A sera mort dans l'année, B vivant encore à la fin de cette année, et C étant mort dans l'une des années précédentes; 7°. ou enfin A seule-

ment sera mort dans l'année, C vivant encore à la fin de cette année, et B étant mort dans l'une des années précédentes. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont, pour la seconde année,

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{2abc}, \quad \frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'')}{2ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right), \quad \frac{(a'-a'').(c'-c'')}{2ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),$$

$$\frac{(a'-a'')b''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right) \text{ et } \frac{(a'-a'')c''}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière, on trouvera que les probabilités de ces divers événemens, pour la troisième année, seront représentées respectivement par

$$\frac{(a''-a''').(b''-b''').(c''-c''')}{3abc}, \quad \frac{(a''-a''').(b''-b''')c'''}{2abc}, \quad \frac{(a''-a''').(c''-c''')b'''}{2abc},$$

$$\frac{(a''-a''').(b''-b''')}{2ab}\left(1-\frac{c''}{c}\right), \quad \frac{(a''-a''').(c''-c''')}{2ac}\left(1-\frac{b''}{b}\right),$$

$$\frac{(a''-a''')b'''}{ab}\left(1-\frac{c''}{c}\right) \text{ et } \frac{(a''-a''')c'''}{ac} \times \left(1-\frac{b''}{b}\right),$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-3}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année; et ainsi de suite pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine : la somme de toutes ces espérances annuelles sera la valeur totale actuelle du capital proposé, payable aux conditions énoncées dans le problème.

257. Maintenant, si ces diverses espérances annuelles sont réduites à leur plus simple expression, et alors arrangées les unes sous les autres, comme dans le problème précédent, on trouvera qu'elles forment seize séries verticales, dont la somme sera égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho AB}{2(1+\varrho)}-\frac{1+A'B}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}+A_{,}B\cdot\frac{a_{,}}{2a}+\frac{1-\varrho AC}{2(1+\varrho)}$$
$$-\frac{1+A'C}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}+A_{,}C\cdot\frac{a_{,}}{2a}-\frac{2}{3}\times\frac{1-\varrho ABC}{(1+\varrho)}$$
$$+\frac{1+A'BC}{3(1+\varrho)}\cdot\frac{2a'}{a}-A_{,}BC\cdot\frac{2a_{,}}{3a}-\frac{1+AB'C}{3(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$+AB_{,}C\cdot\frac{b_{,}}{3b}-\frac{1+ABC'}{3(1+\varrho)}\cdot\frac{c'}{c}+ABC_{,}\frac{c_{,}}{3c}.$$

Or les trois premiers termes ici donnés sont, d'après le problème XXVII, égaux à A^{B}; les trois termes suivans sont, d'après le corollaire 2 du même problème, égaux à A^{C}, et les sept termes restans sont, d'après le problème XXIX, égaux à $-2A^{BC}$. Conséquemment, la valeur totale actuelle du capital proposé, dépendant des conditions du problème, sera égale à $s(A^{B}+A^{C}-2A^{BC})$.

Corollaire.

258. Si les trois têtes sont égales ou du même âge que A, alors A^{B} et A^{C} deviendront tous deux égaux (comme dans le problème XXVII, corol-

laire 5), à $\frac{1-\varrho AA}{2(1+\varrho)}$, et A^{BC} deviendra (comme l' dans le problème XXIX, corollaire 2) égal à $\frac{1-\varrho AAA}{3(1+\varrho)}$. Conséquemment, la valeur actuelle du capital proposé sera représentée dans ce cas par

$$s \times \frac{1-\varrho(3AA-2AAA)}{3(1+\varrho)},$$

ou le tiers de la valeur actuelle du même capital, payable à l'extinction de deux quelconques des trois têtes données.

PROBLÈME XXXI.

259. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que de trois têtes données A, B, C, cette tête A soit la *dernière* qui s'éteigne.

SOLUTION.

Il est évident que la somme ne peut être reçue à la fin de la première année que dans le cas de l'extinction de toutes les têtes, A étant mort le dernier; la probabilité de cet événement est

$$\frac{(a-a')\times(b-b')\times(c-c')}{3abc},$$

ression qui étant multipliée par $s(1+\rho)^{-1}$ don-
a l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la
de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la
nme peut être reçue si l'un quelconque de ces
atre différens événemens a lieu, 1°. ou toutes les têtes
ourront dans l'année, A mourant le dernier; 2°. ou
et B mourront dans l'année, A mourant le der-
r et C étant mort dans l'une des années précé-
ntes; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A
ourant le dernier, et B étant mort dans l'une des an-
es précédentes; 4°. ou seulement A mourra dans
année, B et C étant morts dans l'une des années
écédentes. Les probabilités respectives de ces évé-
nens sont, pour la seconde année,

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc},\quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{2ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')}{2ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right) \text{ et } \frac{a'-a''}{a}\left(1-\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

pressions qui, étant ajoutées ensemble et multi-
iées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on
de recevoir la somme à la fin de la seconde
nnée.

De la même manière, on trouvera les espérances
u'on a de recevoir la somme à la fin de la troi-
ème année, et de toutes les années suivantes jus-
u'aux dernières limites de la vie humaine, et si
'on réduit à leur plus simple expression ces diverses
spérances annuelles et qu'on range leurs termes les

uns sous les autres, elles formeront dix-huit séries verticales, dont la somme sera la valeur actuelle demandée, et sera trouvée égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)} - \frac{1-\varrho AB}{2(1+\varrho)} + \frac{1+A'B}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a'}{a} - A_{,}B \cdot \frac{a_{,}}{2a} - \frac{1-\varrho AC}{2(1+\varrho)}$$
$$+ \frac{1+A'C}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a'}{a} - A_{,}C \cdot \frac{a_{,}}{2a} + \frac{1-\varrho ABC}{3(1+\varrho)} - \frac{1+A'BC}{3(1+\varrho)} \cdot \frac{a'}{a}$$
$$+ A_{,}BC \cdot \frac{a_{,}}{3a} + \frac{1+AB'C}{6(1+\varrho)} \cdot \frac{b'}{b} - ABC_{,} \cdot \frac{b_{,}}{6b}$$
$$+ \frac{1+ABC'}{6(1+\varrho)} \cdot \frac{c'}{c} - ABC_{,} \cdot \frac{c_{,}}{6c}.$$

Mais cette expression est égale à

$$s \times \left[\frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)} - A^{B} - A^{C} + A^{BC}\right],$$

formule qui désigne par conséquent la valeur actuelle demandée.

Corollaire.

260. Si les trois têtes sont égales ou du même âge que A, la valeur actuelle du capital proposé sera, d'après ce qui a été dit dans le corollaire du dernier problème, représentée par

$$s \times \frac{1-\varrho(3A - 3AA + AAA)}{3(1+\varrho)},$$

ou le tiers de la valeur actuelle du même capital payable au dernier décès des trois têtes.

Scolie.

261. Si l'on ajoute ensemble les valeurs actuelles
u capital proposé, comme nous les avons trouvées
ar les problèmes XXIX, XXX et XXXI, on trou-
era leur somme égale à la valeur actuelle du même
apital, payable au décès de A; ainsi la somme de
es trois valeurs sera égale à $s \times \frac{1 - \varrho A}{(1 + \varrho)}$: par là se
rouve démontrée l'exactitude de ces raisonnemens.

PROBLÈME XXXII.

262. Déterminer la valeur actuelle d'un capital
payable au décès de A, pourvu que de trois têtes
données A, B, C, cette tête A soit la *première* ou
a *seconde* qui s'éteigne.

SOLUTION.

La somme proposée peut être reçue à la fin de
a première année, si l'un ou l'autre de quatre dif-
férens événemens a lieu. 1°. Ou les trois têtes mour-
ront dans l'année, A mourant le premier ou le second;
2°. ou A et B mourront tous deux dans l'année, et C
vivra encore à la fin de cette année; 3°. ou A et C

mourront tous deux dans l'année, et B vivra encore à la fin de cette année; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C vivront encore à la fin de cette année. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont représentées par

$$\frac{2(a-a')(b-b')(c-c')}{3abc}, \quad \frac{(a-a').(b-b')c'}{abc},$$
$$\frac{(a-a').(c-c')b'}{abc} \text{ et } \frac{(a-a')b'c'}{abc},$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme proposée peut être reçue si l'un quelconque de ces huit différens événemens a lieu. 1°. Ou les trois têtes mourront dans l'année, A mourant le premier ou le second; 2°. ou A et B mourront tous deux dans l'année, et C vivra encore à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront tous deux dans l'année, et B vivra encore à la fin de l'année; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C vivront encore à la fin de l'année; 5°. ou A mourra avant B dans l'année, C étant mort dans l'une des années précédentes; 6°. ou A mourra avant C dans l'année, B étant mort dans l'une des années précédentes; 7°. ou seulement A mourra dans l'année, C étant mort dans l'une des années précédentes, et B vivant encore à la fin de l'année; 8°. ou seulement A mourra dans l'année, B étant mort dans l'une des années précédentes, et C vivant encore à la fin de l'année. Les probabi-

lités de ces divers événemens, pour la seconde année, sont représentées par

$$\frac{2(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{abc}, \quad \frac{(a'-a'')b''c''}{abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{2ab} \times \left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')}{2ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right), \quad \frac{(a'-a'')b''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right)$$

et $$\frac{(a'-a'')c''}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière, nous pourrons trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine; et la somme de toutes ces espérances sera la valeur totale actuelle du capital proposé, payable aux conditions ci-dessus.

Ces diverses espérances annuelles étant réduites à leur plus simple expression, et arrangées les unes sous les autres, formeront seize séries verticales, dont la somme est la valeur actuelle demandée, et sera trouvée égale à

$$s(A^B + A^C - A^{BC}) \text{ (1)}.$$

(1) Il ne sera pas inutile de remarquer ici qu'on obtiendrait également cette formule en prenant la *somme* des valeurs dé-

Corollaire.

263. Quand les trois têtes sont égales ou toutes du même âge que A, cette expression (d'après ce qui a été dit dans le corollaire du problème XXX) devient égale à

$$s \times \frac{2 - \varrho(3AA - AAA)}{3(1 + \varrho)},$$

ou égale à la différence entre la valeur d'une assurance de la somme proposée sur un groupe de deux têtes, et le tiers de la valeur d'une assurance de la même somme sur le groupe des trois têtes.

PROBLÈME XXXIII.

264. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que de trois têtes données A, B, C, cette tête A soit la *seconde* ou la *troisième* qui s'éteigne.

---

duites des problèmes XXIX et XXX, ou la *différence* entre $s \times \frac{1 - \varrho A}{(1 + \varrho)}$ et la valeur déduite du problème XXXI : ce qui est évident par la nature même de ces questions. En effet, la somme doit être reçue au décès de A, pourvu qu'il meure le *premier* ou le *second*, ou, ce qui est la même chose, elle doit être reçue au décès de A, pourvu qu'il *ne* meure *pas le troisième*.

SOLUTION.

La somme proposée peut être reçue à la fin de la première année si l'un ou l'autre de ces trois divers événemens a lieu. 1°. Ou toutes les trois têtes s'éteindront dans l'année, A étant mort le second ou le troisième; 2°. ou A et B mourront dans l'année, A étant mort le dernier et C vivant encore à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A étant mort le dernier et B vivant encore à la fin de l'année. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont, pour la première année,

$$\frac{2(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc}, \frac{(a-a')(b-b')c'}{2abc}, \text{et } \frac{(a-a').(c-c')b'}{2abc};$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme peut être reçue si l'un ou l'autre de huit différens événemens a lieu. 1°. Ou les trois têtes mourront dans l'année, A étant mort le second ou le troisième; 2°. ou A et B mourront dans l'année, A mourant le dernier et C étant encore vivant à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le dernier et B étant encore vivant à la fin de l'année; 4° ou A et B mourront dans l'année, C étant mort

dans une des années précédentes ; 5°. ou A et C mourront dans l'année, B étant mort dans l'une des années précédentes ; 6°. ou seulement A mourra dans l'année, B étant encore vivant à la fin de l'année et C étant mort dans l'une des années précédentes ; 7°. ou seulement A mourra dans l'année, C étant encore vivant à la fin de l'année et B étant mort dans l'une des années précédentes ; 8°. ou seulement A mourra dans l'année, B et C étant morts dans l'une des années précédentes. Les probabilités de ces divers événemens, pour la seconde année, sont respectivement

$$\frac{2(a'-a'')(b'-b'').(c'-c'')}{3abc}, \quad \frac{(a'-a'')(b'-b'')c''}{2abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(a'-a'').(c' \quad c'')}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right), \frac{(a'-a'')b''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(a'-a'')c''}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right) \text{et} \ \frac{(a'-a'')}{a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière nous pourrons trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et la seconde de toutes ces espérances sera la valeur totale actuelle du capital proposé, dépendant des conditions ci-dessus.

Ces diverses espérances annuelles, étant réduites

leur plus simple expression et arrangées les unes sur les autres, formeront dix séries verticales, dont la somme sera trouvée égale à

$$s\left[\frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)}-A^{BC}\right]$$ (1).

Corollaire.

265. Quand toutes les têtes sont égales ou du même âge que A, le dernier terme de cette formule devient égal à $\frac{1-\varrho AAA}{3(1+\varrho)}$ (d'après ce qui a déjà été dit dans le problème XXIX, corollaire 2). Conséquemment l'expression entière se réduit alors à

$$s\times\frac{2-\varrho(3A-AAA)}{3(1+\varrho)},$$

c'est-à-dire est égale à la différence entre la valeur d'une assurance de la somme proposée sur une seule tête et le tiers de la valeur d'une assurance de la même somme sur le groupe des trois têtes.

---

(1) La valeur du capital payable aux conditions de ce problème est évidemment égale à la *différence* entre la valeur du même capital payable au décès de A, et sa valeur dépendant de la condition que A meure le *premier*; ou encore égale à la *somme* des valeurs trouvées pour les problèmes XXX et XXXI.

PROBLÈME XXXIV.

266. Déterminer la valeur actuelle d'un capita payable au décès de A, pourvu que de trois tête données A, B, C, cette tête A soit la *première* ou l *dernière* qui s'éteigne.

SOLUTION.

La somme proposée peut être reçue à la fin de l première année si l'un ou l'autre de quatre différen événemens a lieu. 1°. ou les trois têtes mourront dan l'année, A mourant le premier ou le dernier; 2°. ou A et B mourront dans l'année, A mourant le premie et C étant encore vivant à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le premie et B étant encore vivant à la fin de l'année; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C vivron encore à la fin de cette année. Les probabilités respectives de ces différens événemens sont

$$\frac{2(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc}, \quad \frac{(a-a').(b-b')c'}{2abc},$$
$$\frac{(a-a').(c-c')b'}{2abc} \text{ et } \frac{(a-a')b'c'}{abc};$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a

de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais à la fin de la seconde année et des suivantes, le capital désigné peut être reçu si l'un quelconque de sept différens événemens a lieu. 1°. Ou toutes les têtes mourront dans l'année, A étant mort le premier ou le dernier, 2°. ou A et B mourront dans l'année, A étant mort le premier et C étant encore vivant à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le premier et B étant encore vivant à la fin de l'année; 4°. ou seulement A mourra dans l'année et B et C seront encore vivans à la fin de l'année; 5°. ou A et B mourront dans l'année, A mourant le dernier et C étant mort dans l'une des années précédentes; 6°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le dernier et B étant mort dans une des années précédentes; 7°. ou seulement A mourra dans l'année, B et C étant morts dans une des années précédentes. Les probabilités de ces divers événemens pour la seconde année sont respectivement

$$\frac{2(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{2abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc}, \quad \frac{(a'-a'')b''c''}{abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'')}{2ab} \times \left(1-\frac{c'}{c}\right), \quad \frac{(a'-a'').(c'-c'')}{2ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),$$

$$\frac{-a''}{a}\left(1-\frac{b'}{b}\right), \left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s\,(1+\rho)^{-n}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année.

De la même manière nous pouvons trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et la somme de toutes ces valeurs annuelles sera la valeur totale actuelle de la somme proposée, payable aux conditions ci-dessus.

Ces diverses espérances annuelles, étant réduites à leur plus simple expression et disposées les unes sous les autres, formeront dix-huit séries verticales, dont la somme sera trouvée égale à

$$s \times \left[\frac{1 - \varrho A}{(1+\varrho)} - A^{B} - A^{C} + 2A^{BC}\right] (1).$$

Corollaire.

267. Quand les trois têtes sont égales, ou du même âge que A, cette expression (d'après ce qui a été dit dans le corollaire du problème XXX), devient égale à $s \times \frac{2 - \varrho(3A - 3AA + 2AAA)}{3(1 + \varrho)}$, c'est-à-dire égale à la différence entre les valeurs d'une assurance de la somme proposée sur une seule tête

---

(1) On obtiendrait également cette formule en prenant la *somme* des valeurs trouvées au moyen des problèmes XXIX et XXXI; ou en prenant la *différence* entre $s \times \frac{1 - \varrho A}{(1 + \varrho)}$ et la valeur trouvée au moyen du problème XXX.

et sur un groupe de deux têtes, plus les deux tiers de la valeur d'une assurance de la même somme sur le groupe des trois têtes.

Scolie.

268. Si l'on ajoute ensemble les valeurs actuelles de la somme proposée, trouvées au moyen des problèmes XXXII, XXXIII et XXXIV, elles seront trouvées égales à deux fois la valeur actuelle de la même somme, payable au décès de A, c'est-à-dire que la somme de ces trois valeurs sera égale à.....
$2s \times \frac{1 - \varrho A}{(1 + \varrho)}$.

PROBLÈME XXXV.

269. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A ou de B, pourvu que l'*une* de ces deux têtes soit la *première* qui s'éteigne de trois têtes données A, B, C.

SOLUTION.

La somme proposée peut être reçue à la fin d'une année quelconque, si l'un ou l'autre de six événemens différens a lieu, 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, A ou B mourant le premier; 2°. ou A et B mourront tous deux dans l'année, et C vivra encore à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront tous deux dans l'année, A mourant le

premier et B étant encore vivant à la fin de l'année; 4°. ou B et C mourront tous deux dans l'année, B mourant le premier et A étant encore vivant à la fin de l'année; 5°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C seront encore vivans à la fin de l'année; 6°. ou seulement B mourra dans l'année, et A et C seront encore vivans à la fin de l'année. Les probabilités de ces divers événemens, pour la première année, sont respectivement

$$\frac{2(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc},\ \frac{(a-a').(b-b')c'}{abc},\ \frac{(a-a').(c-c')b'}{2abc},$$
$$\frac{(b-b').(c-c')a'}{2abc},\ \frac{(a-a')b'c'}{abc}\ \text{et}\ \frac{(b-b')a'c'}{abc},$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

De la même manière, on peut trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année, de la troisième et de toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine; et ces diverses espérances annuelles étant réduites à leur plus simple expression et arrangées les unes sous les autres, comme dans le problème XXIX, formeront la série suivante :

$$\frac{s}{6(1+\rho)}\left(\frac{4abc}{abc}-\frac{4a'b'c'}{abc}-\frac{a'bc}{abc}+\frac{ab'c'}{abc}-\frac{ab'c}{abc}+\frac{a'bc'}{abc}+\frac{2abc'}{abc}-\frac{2a'}{ab}\right.$$
$$+\frac{s}{6(1+\rho)^2}\left(\frac{4a'b'c'}{abc}-\frac{4a''b''c''}{abc}-\frac{a''b'c'}{abc}+\frac{a'b''c''}{abc}-\frac{a'b''c'}{abc}+\frac{a''b'c''}{abc}+\frac{2a'b'c''}{abc}-\frac{2a''}{ab}\right.$$
$$+\frac{s}{6(1+\rho)^3}\left(\frac{4a''b''c''}{abc}-\frac{4a'''b'''c'''}{abc}-\frac{a'''b''c''}{abc}+\frac{a''b'''c'''}{abc}-\frac{a''b'''c''}{abc}+\frac{a'''b''c'''}{abc}+\frac{2a''b''c'''}{abc}-\frac{2a'''}{ab}\right.$$
$$+\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}$$

nt la somme sera la valeur totale actuelle de-
andée.

270. Mais, si nous comparons cette série géné-
le avec celle de la page 173, nous verrons que
; diverses séries verticales dont elle est composée
nt presque les mêmes que celles données à cette
ge, et la seule différence qui les distingue est
ns le *multiple* commun, et dans le *signe* dont sont
fectées la cinquième et la sixième séries verticales.
ar conséquent, la somme de ces diverses séries peut
re facilement obtenue de la manière employée plus
aut. Ainsi, la première et la seconde séries verti-
ales seront trouvées égales à

$$\frac{2s}{3} \times \frac{1-\varrho ABC}{(1+\varrho)};$$

la troisième et la quatrième, égales à

$$-\frac{s}{6a}\left[\frac{(1+A'BC)a'}{(1+\varrho)} - A_{,}BC.a_{,}\right];$$

la cinquième et la sixième égales à

$$-\frac{s}{6b}\left[\frac{(1+AB'C)b'}{(1+\varrho)} - AB_{,}C.b_{,}\right],$$

et la septième et la huitième, égales à

$$\frac{s}{3c}\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)} - ABC_{,}.c_{,}\right].$$

Donc, la valeur totale de la série générale donnée ci-dessus sera égale à s multiplié par

$$\frac{2}{3}\times\frac{1-\varrho ABC}{(1+\varrho)}-\frac{1}{6a}\left[\frac{(1+A'BC)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}BC.a_{,}\right]$$
$$-\frac{1}{6b}\left[\frac{(1+AB'C)b'}{(1+\varrho)}-AB_{,}C.b_{,}\right]$$
$$+\frac{1}{3c}\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)}-ABC_{,}.c_{,}\right].$$

Comme j'aurai occasion de me référer à cette formule dans quelques-uns des problèmes suivans, il sera convenable de la représenter par une expression plus simple; soit donc $\mathcal{A}B^{C}$ cette expression, c'est-à-dire désignons par $\mathcal{A}B^{C}$ la valeur actuelle de 1 fr., payable aux conditions ci-dessus; par conséquent, $s\times\mathcal{A}B^{C}$ désignera la valeur actuelle de la somme proposée dépendant des mêmes circonstances (1).

Corollaire.

271. Quand les trois têtes sont égales, ou du même âge que A, les trois derniers termes de l'expression ci-dessus se détruisent l'un l'autre, et la série entière se réduit alors à

$$\frac{2s}{3}\times\frac{1-\varrho AAA}{(1+\varrho)},$$

(1) En comparant cette formule à la seconde formule du probl. XXIX, corol. 1, on verra que $\mathcal{A}B^{C}=\frac{1+ABC}{1+\varrho}-C^{AB}$

ıx deux tiers de la valeur actuelle de la somme osée, payable à la dissolution du groupe des têtes,

rvations sur la méthode dont M. Morgan s'est servi pour résoudre ce problème.

2. Je ne puis laisser passer cette occasion d'ap- encore une fois l'attention du lecteur sur la ıère bizarre et confuse dont M. Morgan trouve ıleur de la série générale de la page 200; et ce ne porte à le faire, c'est qu'il paraît qu'à me- que M. Morgan entre plus avant dans ce sujet, pand dans ses développemens encore plus de ısion et de désordre. Je dois toutefois commen- ıar demander beaucoup de patience au lecteur, t de le conduire à travers les détours de ce la- ıthe mathématique.

. Morgan égale à la série suivante la somme ɔspérances qu'on a de recevoir le capital pro- aux conditions stipulées dans le problème.

$$\frac{s}{(1+\rho)}\left[\frac{2(a-a')bc}{3abc}-\frac{(a-a')b'c}{6abc}+\frac{(a-a')bc'}{3abc}+\frac{(a-a')b'c'}{6abc}+\frac{(b-b')c}{2bc}+\frac{(b-b')c'}{2bc}-\frac{(a-a')bc}{2abc}+\frac{(a-a')b'c}{2abc}-\frac{(a-a')bc'}{2abc}+\frac{(a-a')b'c'}{2abc}\right]$$

$$+\frac{s}{(1+\rho)^2}\left[\frac{2(a'-a'')b'c'}{3abc}-\frac{(a'-a'')b''c'}{6abc}+\frac{(a'-a'')b'c''}{3abc}+\frac{(a'-a'')b''c''}{6abc}+\frac{(b'-b'')c'}{2bc}+\frac{(b'-b'')c''}{2bc}-\frac{(a-a'')b'c'}{2abc}+\frac{(a-a'')b''c'}{2abc}-\frac{(a-a'')b'c''}{2abc}+\frac{(a-a'')b''c''}{2abc}\right]$$

$$+\frac{s}{(1+\rho)^3}\left[\frac{2(a''-a''')b''c''}{3abc}-\frac{(a''-a''')b'''c''}{6abc}+\frac{(a''-a''')b''c'''}{3abc}+\frac{(a''-a''')b'''c'''}{6abc}+\frac{(b''-b''')c''}{2bc}+\frac{(b''-b''')c'''}{2bc}-\frac{(a-a''')b''c''}{2abc}+\frac{(a-a''')b'''c''}{2abc}-\frac{(a-a''')b''c'''}{2abc}+\frac{(a-a''')b'''c'''}{2abc}\right]$$

$$+\quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

dont il dit que la valeur totale est égale à s multiplié par

$$B_{,}C_{,}\times\frac{b_{,}c_{,}}{6bc}-AB_{,}C_{,}\times\frac{b_{,}c_{,}}{6bc}+BC_{,}\times\frac{c_{,}}{3c}-ABC_{,}\times\frac{c_{,}}{3c}-B_{,}C\times\frac{b_{,}}{6b}+AB_{,}C\times\frac{b_{,}}{6b}$$

$$+\frac{2\varrho(BC-ABC)}{3(1+\varrho)}+\frac{B'C}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{6b}-\frac{AB'C}{(1+\varrho)}\times\frac{b'}{6b}-\frac{BC'}{(1+\varrho)}\times\frac{c'}{3c}+\frac{ABC'}{(1+\varrho)}\times\frac{c'}{3c}-\frac{B'C'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'c'}{6bc}$$

$$+\frac{AB'C'}{(1+\varrho)}\times\frac{b'c'}{6bc}+\frac{\varrho(C-BC)}{2(1+\varrho)}+C_{,}\times\frac{c_{,}}{2c}-BC_{,}\times\frac{c_{,}}{2c}-\frac{c'}{(1+\varrho)}\times\frac{c'}{2c}+\frac{BC'}{(1+\varrho)}\times\frac{c'}{2c}.$$

273. Or, les *six* dernières séries latérales de l'ex-
ssion générale ci-dessus peuvent se réduire aux
ux suivantes :

$$\frac{s}{(1+\varrho)}\left[\frac{(b-b')a'c}{2abc}+\frac{(b-b')a'c'}{2abc}\right]$$
$$+\frac{s}{(1+\varrho)^2}\left[\frac{(b'-b'')a''c'}{2abc}+\frac{(b'-b'')a''c''}{2abc}\right]$$
$$+\frac{s}{(1+\varrho)^3}\left[\frac{(b''-b''')a'''c''}{2abc}+\frac{(b''-b''')a'''c'''}{2abc}\right]$$
$$+\quad \text{etc.,} \quad \text{etc.};$$

ns ce cas, cette expression, au lieu d'être com-
sée de *vingt* différentes séries, pourra se réduire
'en avoir que *douze*. Ou, si on les réduisait à leur
s simple expression, elles formeraient précisé-
nt la *même* expression que celle de la page 200,
ne contient que *huit* termes différens. Mais, par
'et de cette manière négligente et confuse de
céder, on voit que la formule qui désigne la va-
: d'une somme dépendant de la condition men-
nnée dans ce problème ne contient (par la mé-
de de M. Morgan), pas moins de vingt différens
nes; et quand on considère que pour obtenir ces
nes il est nécessaire d'ajouter *de trente à qua-
te* séries différentes, on est frappé d'étonne-
nt, et l'on se demande quel est le *motif* qui a
porter l'auteur à poursuivre une aussi étrange
thode.

274. Il y a cependant encore une autre partie
raisonnemens de M. Morgan, sur laquelle je

juge également nécessaire de faire quelques obse vations. Il dit que la formule donnée plus ha exprime la valeur exacte de la quantité cherch quand C est la plus âgée des trois têtes, mais q « quand A est la plus âgée, *il faut changer* » *caractères* », et, dans ce cas, il désigne par *autre* formule la valeur cherchée, et cette form diffère beaucoup de l'autre pour la forme et les ractères. Cependant quand on la dépouille des qu tités inutiles et étrangères qu'elle contient, elle vient absolument semblable à celle que j'ai don à la page 202, excepté la quantité

$$+ \frac{1}{3c}\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)} - ABC_{,}.c_{,}\right],$$

qu'on a remplacée par son égale

$$- \frac{1}{3ab}\left[\frac{(1+A'B'C)a'b'}{(1+\varrho)} - A_{,}B_{,}C.a_{,}b_{,}\right],$$

275. M. Morgan ne peut ignorer que la va de l'assurance proposée ne dépend pas, dans ce des relations d'âge qu'ont entre elles les tête question. Car quelque valeur qu'il donne aux de A, B et C, et quelque changement qu'il subir aux caractères, il devra en venir toujou la *même* série générale que j'ai donnée à la page dont la somme peut s'exprimer de trois man différentes, selon qu'on ajoute différemment le verses séries verticales qui la composent. Et *cha* de ces formules désignera la valeur de la so

e, soit que A, B ou C soit la plus vieille
is têtes.

d'autant plus nécessaire de se pénétrer de
sse de ces observations, que la solution du
problème nous mettra à même de déter-
la valeur des sommes dépendant des con-
nentionnées dans les problèmes suivans. Con-
nent, plus nous simplifierons la dernière
, plus nous aurons de facilité pour résoudre
olèmes. Cette raison suffira donc pour ex-
ette digression.

PROBLÈME XXXVI.

Déterminer la valeur actuelle d'un capital
au décès de A ou de B, pourvu que l'*une*
têtes soit la *seconde* qui s'éteigne de trois
nnées A, B, C.

SOLUTION.

mme proposée peut être reçue à la fin de la
e année, si l'un ou l'autre de quatre événe-
fférens a lieu : 1°. ou les trois têtes mour-
is l'année, A ou B mourant le second ; 2°. ou
nourront tous deux dans l'année, et C vivra
la fin de l'année ; 3°. ou A et C mourront tous
ns l'année, A mourant le dernier, et B étant
ivant à la fin de cette année ; 4°. ou B et C

mourront tous deux dans cette année, B mourant le dernier, et A étant encore vivant à la fin de cette année. Les probabilités de ces divers événemens sont respectivement

$$\frac{2(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc},\ \frac{(a-a').(b-b')c'}{abc},$$
$$\frac{(a-a').(c-c')b'}{2abc}\ \text{et}\ \frac{(b-b').(c-c')a'}{2abc},$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais, dans la seconde année et les suivantes, la somme peut être reçue si l'un de onze différens événemens a lieu; 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, A ou B mourant le second; 2°. ou A et B mourront dans l'année, et C sera encore vivant à la fin de cette année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le dernier et B étant encore vivant à la fin de l'année; 4°. ou B et C mourront dans l'année, B mourant le dernier et A étant encore vivant à la fin de l'année; 5°. ou A et B mourront dans l'année, C étant mort dans l'une des années précédentes; 6°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le premier, et B étant mort dans l'une des années précédentes; 7°. ou B et C mourront dans l'année, B mourant le premier, et A étant mort dans l'une des années précédentes; 8°. ou seulement A mourra dans l'année, B étant encore vivant à la fin de l'année et C étant mort dans une des

années précédentes; 9°. ou seulement A mourra dans l'année, C étant encore vivant à la fin de l'année et B étant mort dans une des années précédentes; 10°. ou seulement B mourra dans l'année, A étant encore vivant à la fin de l'année et C étant mort dans une des années précédentes; 11°. ou B seulement mourra dans l'année, C vivant encore à la fin de l'année et A étant mort dans une des années précédentes. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont, pour la seconde année,

$$\frac{2(a-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc}, \quad \frac{(b'-b'').(c'-c'')a''}{2abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab} \times \left(1-\frac{c'}{c}\right), \quad \frac{(a'-a'').(c'-c'')}{2ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right)$$

$$\frac{(b'-b'').(c'-c'')}{2bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right), \quad \frac{(a'-a'')b''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(a'-a'')c''}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right), \quad \frac{(b'-b'')a''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right)$$

t

$$\frac{(b'-b'')c''}{bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right),$$

xpressions qui, étant ajoutées ensemble et multiliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière, on trouvera les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine; la

somme de toutes ces valeurs annuelles sera la valeur totale actuelle de la somme proposée, payable aux conditions ci-dessus.

Mais ces diverses espérances annuelles, étant réduites à leur plus simple expression et arrangées les unes sous les autres, formeront dix-huit séries verticales, dont la somme sera trouvée égale à

$$s\left[\frac{1-\varrho\, AB}{(1+\varrho)} + A^c + B^c - 2AB^c\right].$$

Corollaire.

277. Quand toutes les têtes sont égales, ou du même âge que A, cette expression (d'après ce qui a été dit dans le corollaire du prob. XXX) devient égale à $\frac{2s}{3} \times \frac{1-\varrho\,(3AA-2AAA)}{(1+\varrho)}$: ou aux deux tiers de la valeur actuelle de la somme proposée payable à l'extinction de deux quelconques des trois têtes données.

PROBLÈME XXXVII.

278. Déterminer la valeur actuelle d'un capital, payable au décès de A ou de B, pourvu que l'*une* de ces têtes soit la *dernière* qui s'éteigne de trois têtes données A, B, C.

SOLUTION.

La somme proposée ne peut être reçue à la fin de la première année que dans un seul cas: celui où toutes les têtes s'éteindraient dans l'année, C étant mort le premier ou le second. La probabilité de cet événement est

$$\frac{2(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc};$$

expression qui, étant multipliée par $s(1+\rho)^{-1}$, donnera l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme proposée sera reçue si l'un de six différents événemens a lieu: 1° ou les trois têtes mourront dans l'année, C étant mort le premier ou le second; 2° ou seulement A et B mourront dans l'année, C étant mort dans l'une des années précédentes; 3° ou A et C mourront tous deux dans l'année, A mourant le dernier et B étant mort dans une des années précédentes; 4° ou B et C mourront dans l'année, B mourant le dernier et A étant mort dans une des années précédentes; 5° ou seulement A mourra dans l'année, B et C étant morts dans une des années précédentes; 6° ou seulement B mourra dans l'année, A et C étant morts dans une des années précédentes. Les probabilités de ces divers événe-

mens pour la seconde année sont respectivement

$$\frac{2(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')}{2ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right), \quad \frac{(b'-b'').(c'-c'')}{2bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right),$$

$$\frac{(a'-a'')}{a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right) \text{ et } \frac{(b'-b'')}{b}\left(1-\frac{a'}{a}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière, nous pouvons trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année, et de toutes les années suivantes jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et la somme de toutes ces valeurs annuelles sera la valeur totale actuelle du capital proposé, payable aux conditions ci-dessus.

Ces diverses espérances annuelles étant réduites à leur plus simple expression et arrangées les unes sous les autres, formeront vingt-deux séries verticales, dont la somme sera trouvé égale à

$$s\left[\frac{1-\varrho\,(A+B-AB)}{(1+\varrho)}-A^c-B^c+AB^c\right].$$

Corollaire.

279. Quand les trois têtes sont égales, ou du même âge que A, cette expression devient égale à

$\frac{s}{3} \times \frac{1-\varrho(3A-3AA+AAA)}{1+\rho}$; ou aux deux tiers de a valeur actuelle de la somme proposée, payable u dernier décès des trois têtes.

Scolie.

280. Si l'on ajoute ensemble les valeurs actuelles lu capital proposé, obtenues au moyen des problènes XXXV, XXXVI et XXXVII, on les trouvera égales à la valeur actuelle de la même somme, payable au décès de A, *ajoutée* à la valeur actuelle le la même somme, payable au décès de B; c'est-à-dire que la somme de ces trois valeurs sera rouvée égale à $s\left[\frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)}+\frac{1-\varrho B}{(1+\varrho)}\right]$.

PROBLÈME XXXVIII.

281. Déterminer la valeur actuelle d'un capital, payable au décès de A ou de B, pourvu que l'*une* le ces têtes soit la *première* ou la *seconde* qui s'éteigne de trois têtes données A, B, C.

SOLUTION.

Il est évident que dans ce cas le paiement de la somme proposée à la fin d'une année quelconque

dépend uniquement de la dissolution du groupe de têtes AB dans l'année, indépendamment de C; par conséquent, d'après le prob. XXII, sa valeur actuelle sera dans tous les cas égale à $s \times \frac{1-\varrho AB}{(1+\varrho)}$.

Scolie.

282. Dans les problèmes précédens, nous avons pu obtenir des expressions *exactes* pour la valeur des capitaux en reversion qui dépendent des diverses conditions que nous avons examinées, mais les problèmes suivans impliquent, pour la plupart, une chance pour laquelle il est très difficile de trouver une expression qui en désigne exactement la valeur et soit en même temps propre à l'usage général. La chance dont nous voulons parler est la probabilité qu'une tête en particulier a de mourir avant ou après une autre, pendant un espace désigné de leur existence simultanée. Ce sujet a déjà été discuté dans le chapitre V, quand il s'agissait de déterminer la valeur actuelle de certaines *annuités en reversion*; et je vais maintenant le considérer de nouveau dans son application à la manière de déterminer la valeur actuelle des *capitaux* en reversion. Dans la discussion des problèmes suivans, les conditions particulières dont nous parlons seront exprimées en caractères italiques. Et puisque, au moyen des deux lemmes du chapitre V, on peut obtenir une expression plus convenable pour les espérances qu'on a de recevoir la

somme proposée après l'extinction de la plus vieille des têtes en question, je diviserai la discussion en deux parties distinctes; la première aura pour objet de déterminer la valeur de toutes les espérances des n premières années, ou jusqu'à l'extinction de la plus vieille des têtes en question, et la seconde de déterminer la valeur de toutes les espérances postérieures à cette époque.

PROBLÈME XXXIX.

283. Déterminer la valeur actuelle d'une somme payable au décès de A ou de B, pourvu que l'*une* de ces têtes soit la *seconde* ou la *troisième* qui s'éteigne de trois têtes données A, B, C.

SOLUTION.

La somme désignée peut être reçue à la fin de la première année si l'un de quatre différens événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes mourront dans cette année; 2°. ou A et B mourront dans cette année, et C sera encore vivant à la fin de cette année; 3°. ou A mourra après C dans cette année, et B sera encore vivant à la fin de l'année; 4°. ou B mourra après C dans cette année, et A sera encore vivant à la fin de l'année. Les probabilités respectives

de ces divers événemens sont

$$\frac{(a-a')(b-b')(c-c')}{abc}, \frac{(a-a')(b-b')c'}{abc},$$
$$\frac{(a-a').(c-c')b'}{2abc} \text{ et } \frac{(b-b')(c-c')a'}{2abc};$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, jusqu'à l'extinction de la plus vieille tête, la somme désignée peut être reçue si l'un ou l'autre de treize différens événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année; 2°. ou A et B mourront dans l'année, et C sera encore vivant à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le dernier et B étant encore vivant à la fin de l'année; 4°. ou B et C mourront dans l'année, B mourant le dernier et A étant encore vivant à la fin de l'année; 5°. ou A et B mourront dans l'année, C étant mort dans une des années précédentes; 6°. ou A et C mourront dans l'année, B étant mort dans une des années précédentes; 7°. ou B et C mourront dans l'année, A étant mort dans une des années précédentes; 8°. ou seulement A mourra dans l'année, B vivant encore à la fin de l'année et C étant mort dans une des années précédentes; 9°. ou seulement A mourra dans l'année, C vivant encore à la fin de l'année et B étant mort dans une des années précédentes; 10°. ou seulement B mourra dans l'année, A vivant encore à

fin de l'année et C étant mort dans une des années récédentes; 11°. ou seulement B mourra dans l'anée, C vivant encore à la fin de l'année et A étant ıort dans une des années précédentes; 12°. ou seuleıent A mourra dans l'année, et B *et* C *seront morts ans une des années précédentes, B étant mort le remier;* 13°. ou seulement B mourra dans l'année, t A *et* C *seront morts dans une des années précéentes,* A *étant mort le premier.*

Les probabilités respectives de ces divers événeıens sont

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{abc},\ \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc},\ \frac{(b'-b'').(c'-c'')a''}{2abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),\ \frac{(a'-a'').(c'-c'')}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),$$

$$\frac{(b'-b'').(c'-c'')}{bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right),\ \frac{(a'-a'')b}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(a'-a'')c''}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),\ \frac{(b'-b'')a''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{(b'-b'')c''}{bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right),\ \frac{(a'-a'')}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right)$$

t $$\frac{b'-b''}{2b}\left(1-\frac{a'}{a}\right)\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

xpressions qui, étant ajoutées ensemble et multiliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a e recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière nous pouvons trouver les espéances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la

troisième année ou de toutes les années suivantes; et si l'on réduit à leur plus simple expression et qu'on arrange les unes sous les autres ces diverses espérances annuelles, elles formeront seize séries verticales, dont la somme, si on les prolongeait jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, serait trouvée égale à s multiplié par

$$\frac{1-\rho A}{2(1+\rho)}+\frac{1-\rho B}{2(1+\rho)}-AB+\frac{1+A'B}{2(1+\rho)}\cdot\frac{a'}{a}+\frac{1+AB'}{2(1+\rho)}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$+\frac{1+AC}{2(1+\rho)}-\frac{1+A'C}{2(1+\rho)}\cdot\frac{a_{,}}{a}+\frac{1+BC}{2(1+\rho)}-\frac{1+B'C}{2(1+\rho)}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$-\frac{1-\rho ABC}{(1+\rho)}-A_{,}BC\times\frac{a_{,}}{2a}-AB_{,}C.\frac{b_{,}}{2b}-ABC_{,}.\frac{c_{,}}{2c}.$$

Mais cette expression, indépendamment du multiplicateur commun s, peut se réduire à

$$\frac{2-\rho(A+B-2ABC)+AC+BC}{2(1+\rho)}-AB$$
$$+\frac{1}{2a}\left[\frac{(A'B-A'C)a'}{(1+\rho)}-A_{,}BC.a_{,}\right]$$
$$+\frac{1}{2b}\left[\frac{(AB'-B'C)b'}{(1+\rho)}-AB_{,}C.b_{,}\right]$$
$$+ABC_{,}.\frac{c_{,}}{c},$$

pour plus de commodité, je la représenterai par $\mathfrak{D}$.

284. Maintenant, puisque une partie seulement des diverses séries verticales précitées (séries qui sont

représentées par les quantités ci-dessus) doivent être continuées jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et qu'elles dépendent de l'âge comparatif des têtes proposées, il sera nécessaire de diviser la discussion du problème en trois parties distinctes, selon que l'une ou l'autre des têtes proposées sera la plus âgée des trois; car dans tous les cas, ces diverses séries verticales ne doivent être continuées que *jusqu'à l'extinction de la plus vieille des trois têtes*, parce que, *après* cette époque, nous pouvons obtenir une valeur plus correcte de toutes les espérances ultérieures au moyen du premier lemme du chapitre V.

285. Ier CAS. Soit A la plus vieille des trois têtes; dans ce cas toutes les séries verticales dans lesquelles la tête A est impliquée doivent évidemment être continuées jusqu'aux dernières limites de la vie humaine : mais toutes les séries dans lesquelles la tête A ne se trouve pas impliquée ne doivent être continuées que jusqu'au $n^{ième}$ terme. Conséquemment les quantités

$$\frac{1-\varrho B}{2(1+\varrho)},\quad \frac{1+BC}{2(1+\varrho)}\quad \text{et}\quad \frac{1+B'C}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}$$

deviendront

$$\left[\frac{1-\varrho B}{2(1+\varrho)}-\frac{1-\varrho B^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}\right],$$

$$\left[\frac{1+BC}{2(1+\varrho)}-\frac{1+B^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}\right]$$

et $$\left[\frac{1+B'C}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}-\frac{1+B'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)}\times\frac{\beta'\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}\right]:$$

donc la somme des n premiers termes des dive séries verticales précitées (c'est-à-dire la somme toutes les espérances des n premières années), viendra égale à s multiplié par

$$\mathfrak{D} - \frac{1-\varrho B^{\circ}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n} - \frac{1+B^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta\gamma}{bc}(1+\rho)^{\cdot}$$

$$+ \frac{1+B'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\beta'\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de A, les espérances relat aux diverses chances dont dépend le paiement capital, peuvent être plus correctement exprin au moyen du premier lemme du chapitre V. (puisque la chance qu'on a de recevoir la somme fin d'une quelconque de ces années dépend d mort de B dans cette année, et de la mort de A térieurement à celle de C dans une des années cédentes (on a vu dans le lemme que cette dern condition a une probabilité représentée par ϖ s'ensuit que la somme des espérances de ces dive années, continuées jusqu'aux dernières limites d vie humaine, sera égale à

$$s.\varpi \times \left[\frac{\beta-\beta'}{b(1+\varrho)^{n+1}} + \frac{\beta'-\beta''}{b(1+\varrho)^{n+2}} + \frac{\beta''-\beta'''}{b(1+\varrho)^{n+3}} + \text{et}\right.$$

expression qui, d'après le problème XXII, co laire 1, est égale à

$$s.\varpi \times \frac{1-\varrho B^{\circ}}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}.$$

conséquent cette valeur, ajoutée à la somme n premiers termes des diverses séries verticales citées, exprimera la valeur totale actuelle du ital désigné dans le cas proposé, et sera trouvée le à s multiplié par

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\varpi\right) \times (1-\rho B^0)\beta + \frac{\gamma}{2c}\left[(1+B^0C^0)\beta - (1+B'^0C^0)\beta'\right]}{b(1+\rho)^{n+1}}.$$

286. IIe CAS. Soit B la plus vieille des trois têtes. ns ce cas toutes les séries collatérales dans lesquelles tête B se trouve impliquée doivent être continuées qu'aux dernières limites de la vie humaine; mais tes les séries dans lesquelles elle ne se trouve pas pliquée ne devront être continuées que jusqu'au ^{me} terme seulement. Par conséquent les quantités

$$\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)},\ \frac{1+AC}{2(1+\varrho)} \text{ et } \frac{1+A'C}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a'}{a}$$

viendront respectivement égales à

$$\left[\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)} - \frac{1-\varrho A^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a}{a}(1+\rho)^{-n}\right],$$

$$\left[\frac{1+AC}{2(1+\varrho)} - \frac{1+A^0C^0}{2(1+\varrho)} \times \frac{a\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}\right]$$

$$\left[\frac{1+A'C}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a'}{a} - \frac{1+A'^0C^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}\right]:$$

nc la somme des n premiers termes des diverses ries collatérales précitées sera égale à s multi-

plié par

$$\mathfrak{D} - \frac{1-\varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - \frac{1+A^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ \frac{1+A'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de B, les espérances relatives aux diverses chances dont dépend le paiement de la somme peuvent être exprimées plus correctement pour toutes les années suivantes au moyen du premier lemme du chapitre V. Car, puisque la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une quelconque de ces années dépend de la mort de A dans l'année, et de celle de B antérieurement à celle de C dans une des années précédentes (on a vu dans le lemme que la probabilité de cette dernière condition est représentée par φ) il s'ensuit, d'après ce qui a été dit pour le cas précédent, que la somme de toutes les espérances de ces diverses années, continuées jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, sera égale à

$$s.\varphi \times \frac{1-\varrho A^{\circ}}{(1+\varrho)} \times \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}.$$

Conséquemment cette valeur, ajoutée à la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, exprimera la valeur totale actuelle de la somme donnée dans le cas proposé, et sera trouvée égale à s multiplié par

$$\mathfrak{D} - \frac{\left(\frac{1}{2}-\varphi\right)\times(1-\varrho A^{\circ})\alpha + \frac{\gamma}{2c}[(1+A^{\circ}C^{\circ})\alpha-(1+A'^{\circ}C^{\circ})\alpha']}{a(1+\varrho)^{n+1}}$$

287. IIIe cas. — Soit C la plus vieille des trois têtes. ns ce cas, toutes les séries collatérales dans lesquelles la tête C se trouve impliquée doivent être ntinuées jusqu'aux dernières limites de la vie huaine; mais toutes les séries dans lesquelles la tête n'est pas impliquée doivent être continuées jus'au $n^{ième}$ terme seulement. Conséquemment les iantités

$$\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)},\ \frac{1-\varrho B}{2(1+\varrho)},\ AB,\ \frac{1+A'B}{2(1+\rho)}\cdot\frac{a'}{a},\ \text{et}\ \frac{1+AB'}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}$$

eviendront respectivement égales à

$$\left[\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)}-\frac{1-\varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}\ (1+\varrho)^{-n}\right],$$

$$\left[\frac{1+\varrho B}{2(1+\varrho)}-\frac{1+\varrho B^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}\ (1+\varrho)^{-n}\right],$$

$$\left[AB-A^{\circ}B^{\circ}\ \frac{\alpha\beta}{ab}\ (1+\varrho)^{-n}\right],$$

$$\left[\frac{1+A'B}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}-\frac{1+A'^{\circ}B^{\circ}}{2(1+\rho)}\cdot\frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}\right]$$

et $$\left[\frac{1+AB'}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}-\frac{1+A^{\circ}B'^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha\beta'}{ab}\ (1+\varrho)^{-n}\right]:$$

lonc, la somme des n premiers termes des diverses éries collatérales précitées sera égale à s multiplié par

$$\mathfrak{D}-\frac{1-\varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}\ (1+\varrho)^{-n}-\frac{1-\varrho B^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}\ (1+\rho)^{-n}$$
$$+A^{\circ}B^{\circ}\times\frac{\alpha\beta}{ab}\ (1+\rho)^{-n}-\frac{(1+A'^{\circ}B^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha'\beta}{ab}\ (1+\rho)^{-n}$$
$$-\frac{1+A^{\circ}B'^{\circ}}{2(1+\rho)}\times\frac{\alpha\beta'}{ab}\ (1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de C, la chance qu'on a de recevoir la somme désignée à la fin d'une des années suivantes dépendra de l'un de ces trois événemens : 1°. ou l'*une* des têtes A et B mourra dans l'année ; 2°. ou seulement A mourra dans l'année, B étant mort avant C dans une des années précédentes ; 3°. ou seulement B mourra dans l'année, A étant mort avant C dans une des années précédentes.

La somme de toutes les espérances qu'on a de recevoir la somme proposée dans le premier cas, pour toutes les années ultérieures jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, est, par le prob. XXII, cor. 1, égale à

$$s \times \frac{1-\varrho A^{0}B^{0}}{(1+\rho)} \times \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n};$$

et la somme de toutes les espérances relatives aux deux autres cas est, comme précédemment, égale à

$$s.\varphi \times \frac{1-\rho A^{0}}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} + s.\varpi \times \frac{1-\varrho B^{0}}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}.$$

Par conséquent, ces valeurs, ajoutées à la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, exprimeront la valeur totale actuelle de la somme donnée dans le cas proposé, et seront trouvées égales à s multiplié par

$$\mathfrak{D} - \frac{\left(\frac{1}{2}-\varphi\right)\times(1-\varrho A^{0})\alpha - \frac{\beta}{2b}\left[(1+A^{0}B^{0})\alpha-(1+A'^{0}B^{0})\alpha'\right]}{a(1+\varrho)^{n+1}}$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{2}-\varpi\right)\times(1-\varrho B^{0})\beta - \frac{\alpha}{2a}\left[(1+A^{0}B^{0})\beta-(1+A^{0}B'^{0})\beta'\right]}{b(1+\varrho)^{n+1}}$$

Corollaire.

8. Quand les trois têtes sont égales, ou du même
que A, les trois dernières quantités de la for-
représentée par 𝕯 s'annullent entièrement, et
ression générale devient égale à

$$s \times \frac{1-\rho(A+AA-AAA)}{1+\rho}.$$

Scolie.

9. Comme dans les problèmes suivans on aura
ent occasion de rappeler les expressions déduites
problème dans chacun de ses trois cas, il
plus commode de les représenter par un carac-
simple. Soient donc

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\varpi\right).(1-\rho B^\circ)\beta+\frac{\gamma}{2c}\left[(1+B^\circ C^\circ)\beta-(1+B'^\circ C^\circ)\beta'\right]}{b(1+\rho)^{n+1}},$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\varphi\right).(1-\rho A^\circ)\alpha+\frac{\gamma}{2c}\left[(1+A^\circ C^\circ)\alpha-(1+A'^\circ C^\circ)\alpha'\right]}{a(1+\rho)^{n+1}},$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\varpi\right).(1-\rho B^\circ)\beta-\frac{\alpha}{2a}\left[(1+A^\circ B^\circ)\beta-(1+A^\circ B'^\circ)\beta'\right]}{b(1+\rho)^{n+1}},$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\varphi\right).(1-\rho A^\circ)\alpha-\frac{\beta}{2b}\left[(1+A^\circ B^\circ)\alpha-(1+A'^\circ B^\circ)\alpha'\right]}{a(1+\rho)^{n+1}}.$$

Alors la valeur actuelle de la somme proposée dépendant de la condition mentionnée dans le problème sera représentée respectivement par ces diverses formules

$$s\,(\mathfrak{D} - v)$$
$$s\,(\mathfrak{D} - x)$$
$$s\,(\mathfrak{D} - y - z);$$

selon que A, B ou C sera la plus vieille des trois têtes.

PROBLÈME XL.

290. **Déterminer la valeur actuelle d'une somme payable au décès de A ou de B, pourvu que l'*une* de ces têtes soit la *première* ou la *dernière* qui s'éteigne de trois têtes donnés A, B, C.**

SOLUTION.

Le paiement de la somme proposée à la fin de la première année dépendra de l'un de ces six différents événemens; 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année; 2°. ou A et B mourront dans l'année, et C vivra encore à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A étant mort le premier et B étant encore vivant à la fin de l'année; 4°. ou

B et C mourront dans l'année, B étant mort le premier, et A étant encore vivant à la fin de l'année; 5°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C seront encore vivans à la fin de l'année; 6°. ou seulement B mourra dans l'année, et A et C seront encore vivans à la fin de l'année. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont, pour la première année

$$\frac{(a-a')(b-b')(c-c')}{abc}, \quad \frac{(a-a')(b-b')c'}{abc}, \quad \frac{(a-a')(c-c')b'}{2abc}$$
$$\frac{(b-b').(c-c')a'}{2abc}, \quad \frac{(a-a')b'c'}{abc}, \quad \text{et} \quad \frac{(b-b')a'c'}{abc};$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme désignée peut être reçue si l'un de neuf différens événemens a lieu; ce sont, en outre des six que nous venons d'énumérer, les suivans: 7°. ou A et B mourront dans l'année, C étant mort dans une des années précédentes; 8°. ou seulement A mourra dans l'année et *B et C seront morts dans une des années précédentes, C étant mort le premier;* 9°. ou seulement B mourra dans l'année et *A et C seront morts dans une des années précédentes, C étant mort le premier.* Les probabilités respectives de ces divers événemens pour la seconde année sont

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'')(c'-c'')}{abc}, \quad \frac{(a'-a'')(b'-b'')c''}{abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc},\ \frac{(b'-b'').(c'-c'')a''}{2abc},\ \frac{(a'-a'')\,b''c''}{abc},$$

$$\frac{(b'-b'')a''c''}{abc},\ \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{a'-a''}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right)$$

et $$\frac{b'-b''}{2b}\left(1-\frac{a'}{a}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right):$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière, nous trouverons les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes, et si l'on réduit à leur plus simple expression ces diverses espérances annuelles et qu'on les dispose les unes sous les autres, elles formeront seize séries collatérales, dont la somme, si on les continuait jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, serait trouvée égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho\ A}{2(1+\varrho)}+\frac{1-\varrho\ B}{2(1+\varrho)}+AB-\frac{1+A'\,B}{2(1+\varrho)}.\frac{a'}{a}$$
$$-\frac{1+AB'}{2(1+\varrho)}.\frac{b'}{2b}-\frac{1+AC}{2(1+\varrho)}+\frac{1+A'C}{2(1+\varrho)}.\frac{a'}{a}-\frac{1+BC}{2(1+\varrho)}$$
$$+\frac{1+B'C}{2(1+\varrho)}.\frac{b'}{b}+\frac{1-\varrho ABC}{(1-\varrho)}+A_{,}BC.\frac{a_{,}}{2a}$$
$$+AB_{,}C.\frac{b_{,}}{2b}-ABC_{,}.\frac{c_{,}}{c}:$$

expression, qui dépouillée du multiple commun s,

peut se réduire à la formule

$$\frac{2-\varrho(A+B+2ABC)-AC-BC}{2(1+\varrho)}+AB$$
$$-\frac{1}{2a}\left[\frac{(A'B-A'C)a'}{(1+\varrho)}-A_{,}BC.a_{,}\right]$$
$$-\frac{1}{2b}\left[\frac{(AB'-B'C)b'}{(1+\varrho)}-AB_{,}C.b_{,}\right]+ABC_{,}.\frac{c_{,}}{2c};$$

que pour plus de commodité je représenterai par $\mathfrak{C}_0$.

291. Ier cas. — Soit A la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, sera en suivant la même opération que dans le premier cas du problème précédent, trouvée égale à

$$\mathfrak{C}-\frac{1-\varrho B^{\circ}}{2(1+\varrho)}.\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}+\frac{1+B^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)}.\frac{\beta\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}$$
$$-\frac{1+B'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)}.\frac{\beta'\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}.$$

Après le décès de A, toutefois, les espérances relatives aux conditions du problème peuvent être plus correctement exprimées pour toutes les années suivantes au moyen du second lemme du chapitre V; car, puisque la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une quelconque de ces années dépend de la mort de B dans l'année et de la mort de A antérieurement à celle de C dans une des années précédentes (on a vu dans le lemme que la probabilité de cette dernière condition est représentée par $1-\varpi$),

nous trouverons que la somme des espérances ultérieures jusqu'aux dernières limites de la vie humaine est égale à $s(1-\varpi) \times \frac{1-\varrho B^{\circ}}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}$. Conséquemment cette valeur ajoutée à la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, donnera $s(\mathfrak{C}+v)$ pour la valeur totale actuelle demandée.

292. II[e] cas. — Soit B la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées sera, en opérant de la même manière que dans le second cas du problème précédent, trouvée égale à

$$\mathfrak{C} - \frac{1-\varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+A^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$- \frac{1+A'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho^{-n}).$$

Après le décès de B, toutefois, les autres espérances peuvent être exprimées plus correctement pour toutes les années suivantes au moyen du lemme que nous avons cité plus haut; car, puisque la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une quelconque de ces années dépend de la mort de A dans l'année et de la mort de B antérieurement à celle de C dans une des années précédentes (on a vu dans le lemme que la probabilité de cette dernière condition est représentée par $1-\varphi$), nous trouverons que la somme des espérances de ces années, continuées

jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, est égale à $s(1-\varphi)\times\frac{1-\varrho A^\circ}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}$. Par conséquent cette valeur ajoutée à la somme des n premiers termes trouvés ci-dessus, exprimera la valeur totale actuelle de la somme donnée dans le cas proposé. Donc cette valeur totale est égale à $s(\mathfrak{C}+x)$.

293. IIIe CAS. — Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées sera, en opérant de la même manière que dans le troisième cas du problème précédent, trouvée égale à

$$\mathfrak{C}-\frac{1-\varrho A^\circ}{2(1+\varrho)}\times\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}-\frac{1-\varrho B^\circ}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}$$
$$-A^\circ B^\circ\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}+\frac{1+A'^\circ B^\circ}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+\frac{1+A^\circ B'^\circ}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha\beta'}{ab}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais, après le décès de C, les espérances relatives aux conditions du problème peuvent être exprimées plus correctement pour toutes les années suivantes au moyen du lemme que nous avons cité plus haut : car la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une de ces années dépendra de l'un de ces trois événemens : 1°. ou A et B mourront tous deux dans l'année ; 2°. ou A mourra dans l'année, B étant mort avant C dans une des années précédentes ; 3°. ou B mourra dans l'année, A étant mort avant

C dans une des années précédentes. Les probabilités de ces trois événemens pour la $(n+1)^{ième}$ année sont respectivement $\frac{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}{ab}$, $\frac{\alpha-\alpha'}{a}\left(1-\varphi-\frac{\beta}{b}\right)$ et $\frac{\beta-\beta'}{b}\left(1-\varpi-\frac{\alpha}{a}\right)$: expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $(1+\rho)^{-(n+1)}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+1)^{ième}$ année.

De la même manière, les probabilités de ces événemens pour la $(n+2)^{ième}$ année sont respectivement $\frac{(\alpha'-\alpha'')(\beta'-\beta'')}{ab}$, $\frac{\alpha'-\alpha''}{a}\left(1-\varphi-\frac{\beta'}{b}\right)$ et $\frac{\beta'-\beta''}{b}\left(1-\varpi-\frac{\alpha'}{a}\right)$, expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $(1+\rho)^{-(n+2)}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+2)^{ième}$ année. En raisonnant de la même manière, on trouvera l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+3)^{ième}$ année, et ainsi de suite jusqu'aux dernières limites de la vie humaine ; la somme de toutes ces espérances annuelles, réduites à leur plus simple expression, sera trouvée égale à s multiplié par

$$
\begin{aligned}
&(1-\varphi)\times\frac{1-\varrho A^{0}}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}\\
&+(1-\varpi)\times\frac{(1-\varrho)B^{0}}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}\\
&-\frac{1+A^{0}B^{0}}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}\\
&+A^{0}B^{0}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}:
\end{aligned}
$$

nule qui étant ajoutée à la somme des n premiers
nes des diverses séries collatérales précitées ex-
nera la valeur totale actuelle de la somme dé-
.ée dans le cas proposé. Donc cette valeur totale
égale à $s(\mathfrak{C}+y+z)$.

Corollaire.

94. Quand toutes les têtes sont égales ou du
ne âge que A, les trois dernières quantités de
formule représentée par $\mathfrak{C}$ s'annullent entière-
nt, et l'expression générale devient alors

$$s + \frac{1-\varrho(A-AA+AAA)}{(1+\varrho)}.$$

Scolie.

295. On voit que la valeur actuelle du capital
igné, payable aux conditions stipulées dans le
blème, ajoutée à la valeur actuelle de la même
nme, payable aux conditions stipulées dans le
blème précédent, donne une somme égale à
$\times \frac{2-\varrho(A+B)}{(1+\varrho)}$: d'où il suit que la valeur d'une
lles étant déterminée, on pourra facilement ob-
nir l'autre en retranchant cette valeur de l'ex-
ession générale que nous venons de donner,

pourvu que les âges soient les mêmes dans les deux exemples.

PROBLÈME XLI.

296. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que cette tête soit la *seconde* qui s'éteigne de trois têtes données A,B,C, et pourvu que C meure avant B.

SOLUTION.

La chance qu'on a de recevoir le capital désigné à la fin de la première année dépend de l'un de ces deux événemens : 1°. ou toutes les têtes mourront dans cette année, C étant mort le premier et A le second ; ou A et C mourront dans l'année, A étant mort le dernier et B vivant encore à la fin de l'année. Les probabilités de ces deux événemens sont respectivement

$$\frac{(a-a')(b-b')(c-c')}{6abc} \text{ et } \frac{(a-a').(c-c')b'}{2abc};$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année et de toutes les années

suivantes dépendra de l'un des quatre événemens différens : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, C mourant le premier et A le second; 2°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le dernier et B vivant encore à la fin de l'année; 3°. ou A et B mourront dans l'année, A mourant le premier et C étant mort dans une des années précédentes; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, B vivant encore à la fin de l'année et C étant mort dans une des années précédentes. Les probabilités de ces divers événemens pour la seconde année sont respectivement

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{6abc}, \quad \frac{(a'-a'').(c'-c'')\,b''}{2ab},$$

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'')}{2ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right) \text{ et } \frac{(a'-a'')\,b''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière nous pouvons trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine ; la somme de toutes ces espérances annuelles sera la valeur totale actuelle du capital désigné payable aux conditions du problème.

Ces diverses espérances étant réduites à leur plus simple expression et disposées les unes sous les autres, formeront douze séries collatérales, dont la

somme, ou la valeur actuelle demandée, sera trouvée égale à $s(A^B - A^{BC})$.

Corollaire.

297. Quand toutes les têtes sont égales, ou du même âge que A, cette expression (d'après ce qui a été dit au corollaire du prob. XXX), devient égale à $s \times \frac{1-\varrho(3AA - 2AAA)}{6(1+\varrho)}$; c'est-à-dire égale à la sixième partie de la valeur actuelle du capital proposé payable à l'extinction de deux quelconques des trois têtes données.

PROBLÈME XLII.

298. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que cette tête soit la *dernière* qui s'éteigne de trois têtes données A, B, C, et pourvu que C meure avant B.

SOLUTION.

La somme désignée ne peut être reçue à la fin de la première année que si les trois têtes meurent dans cette l'année et dans l'ordre indiqué dans le problème; la probabilité de cet événement est

$\frac{a-a')(b-b').(c-c')}{6abc}$, expression qui étant multipliée
›ar $s(1+\rho)^{-1}$, donnera l'espérance qu'on a de re-
:evoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la
omme proposée peut être reçue si l'un ou l'autre
le trois différens événemens a lieu: 1°. ou toutes
es têtes mourront dans l'année, dans l'ordre dé-
igné; 2°. ou A et B mourront dans l'année, A étant
nort le dernier et C étant mort dans une des an-
iées précédentes; 3°. ou seulement A mourra dans
'année, et *B et C seront morts dans les années pré-
:édentes, C étant mort le premier.* Les probabilités
espectives de ces divers événemens pour la seconde
nnée sont

$$\frac{(a'-a'')(b'-b'')(c'-c'')}{6abc},\ \frac{(a'-a'')(b'-b'')}{2ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\text{et}\ \frac{a'-a''}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right):$$

pressions qui étant ajoutées ensemble et multi-
iées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on
de recevoir la somme à la fin de la seconde an-
e. De la même manière nous pouvons trouver
espérances qu'on a de recevoir la somme à la
de la troisième année et de toutes les années
vantes jusqu'à l'extinction de la plus vieille des
es proposées; et si ces diverses espérances annuel-
sont réduites à leur plus simple expression et
posées les unes sous les autres, elles formeront
atorze séries collatérales; dont les n premiers

termes varieront selon l'âge comparatif des têtes en question.

299. Ier cas. — Soit A la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, les diverses séries dont nous parlons doivent être continuées jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, parce que la tête A est impliquée dans chacune d'elles. Par conséquent, la valeur de ces séries sera égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)}+\frac{AB}{2}-A_{,}B\cdot\frac{a_{,}}{2a}-\frac{1+AC}{2(1+\varrho)}$$
$$+\frac{1+A'C}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}+\frac{1+\varrho ABC}{6(1+\varrho)}-\frac{1+A'BC}{6(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}$$
$$+A_{,}BC\cdot\frac{a_{,}}{6a}+\frac{1+AB'C}{3(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$+AB_{,}C\cdot\frac{b_{,}}{6b}-\frac{1+ABC'}{6(1+\varrho)}\cdot\frac{c'}{c}+ABC_{,}\cdot\frac{c_{,}}{3c}:$$

expression qui, indépendamment du multiplicateur commun s, peut se réduire à

$$\frac{1-\varrho(3A+ABC)-3AC}{6(1+\varrho)}+\frac{AB}{2}$$
$$+\frac{1}{6a}\left[\frac{(2+3A'C-A'BC)a'}{(1+\varrho)}-(3A_{,}B-A_{,}BC)a_{,}\right]$$
$$+\frac{1}{6b}\times\left[\frac{(1+AB'C)2b'}{(1+\varrho)}+AB_{,}C.b_{,}\right]$$
$$-\frac{1}{6c}\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)}+ABC_{,}.2c_{,}\right];$$

et que je représenterai par $\mathcal{S}$. Donc quand A est la plus vieille des trois têtes, la valeur actuelle de la somme donnée sera représentée par $s\times\mathcal{S}$.

300. IIe CAS. — Soit B la plus vieille des trois têtes. ans ce cas, la somme des n premiers termes des di- erses séries collatérales précitées sera trouvée égale à

$$\mathcal{S} - \frac{1-\varrho A^o}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+A^oC^o}{2(1+\varrho)}$$
$$\times \frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n} - \frac{1+A'^oC^o}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}.$$

lais après l'extinction de la tête B, la somme des spérances de toutes les années suivantes peut être lus correctement exprimée, comme dans le second as du problème XL, par la formule

$$s(1-\varphi) \times \frac{1-\varrho A^o}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}.$$

lonc si l'on ajoute cette valeur à la somme des n remiers termes des diverses séries que nous venons e trouver, on verra que la valeur totale actuelle de somme proposée, quand B est la plus vieille des ois têtes, est égale à $s(\mathcal{S}+x)$.

301. IIIe CAS. Soit C la plus vieille des trois têtes. ans ce cas la somme des n premiers termes des di- erses séries collatérales dont nous parlons sera rouvée égale à

$$\mathcal{S} - \frac{1-\varrho A^o}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - A^oB^o \cdot \frac{\alpha\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ A_{\prime}^oB^o \cdot \frac{\alpha\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après l'extinction de la tête C, la chance qu'(a de recevoir la somme proposée à la fin d'une ann quelconque ne peut dépendre que de deux évén mens seulement : 1°. ou A et B mourront dans l'a née, A étant mort le dernier; 2°. ou seulement mourra dans l'année, B étant mort après C dans u des années précédentes. Les probabilités de ces de événemens pour la $(n+1)^{ième}$ année sont

$$\frac{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}{2ab} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha-\alpha'}{a}\left(1-\varphi-\frac{\beta}{b}\right)$$

expressions qui, étant multipliées par $(1+\rho)^{-(}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la som à la fin de la $(n+1)^{ième}$ année. De la même manière trouvera les espérances qu'on a de recevoir la som à la fin de toutes les années suivantes, jusqu'à dernières limites de la vie humaine; et la somme toutes ces espérances sera trouvée égale à s mu plié par

$$(1-\varphi)\times\frac{1-\varrho A^{0}}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}-\frac{1+A^{0}B^{0}}{2(1+\varrho)}$$
$$\times\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}+A^{0}B^{0}.\frac{\alpha\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+\frac{1+A'^{0}B^{0}}{2(1+\varrho)}\frac{\alpha'\beta}{ab}\times(1+\rho)^{-n}-A_{,}^{0}B^{0}.\frac{\alpha_{,}\beta}{2ab}(1+\rho)$$

Conséquemment cette valeur ajoutée à la somme n premiers termes des diverses séries précitées ex mera la valeur totale actuelle de la somme don dans le cas proposé. Donc cette valeur actuelle égale à $s(\mathfrak{F}+z)$.

Corollaire.

302. Quand les trois têtes sont égales ou du même âge que A, les trois dernières quantités de la formule représentée par $\mathcal{S}$ s'annulent, et l'expression générale devient alors

$$s \times \frac{1 - \varrho(3A - 3AA + AAA)}{6(1 + \varrho)};$$

c'est-à-dire égale à la sixième partie de la valeur actuelle de la somme proposée, payable au dernier décès des trois têtes.

PROBLÈME XLIII.

303. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que cette tête soit la *première* ou la *seconde* qui s'éteigne de trois têtes données A, B, C, et pourvu que C, dans le dernier cas, meure avant B.

SOLUTION.

Le paiement de la somme à la fin de la première année dépendra de l'un des quatre événemens différens : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année,

A étant mort le premier, ou C étant mort le premier et A le second; 2°. ou A et B mourront dans l'année, A étant mort le premier et C étant encore vivant à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, et B vivra encore à la fin de l'année; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C vivront encore à la fin de l'année. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont

$$\frac{(a-a').(b-b').(c-c')}{2abc},\ \frac{(a-a')(b-b')c'}{2abc},$$
$$\frac{(a-a').(c-c')b'}{abc}\ \text{et}\ \frac{(a-a')b'c'}{abc};$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme désignée peut être reçue si l'un de six événemens différens a lieu : ce sont les suivans, en outre des quatre déjà cités. 5°. Ou A et B mourront dans l'année, A mourant le premier, et C étant mort dans une des années précédentes; 6°. ou seulement A mourra dans l'année, B vivant encore à la fin de l'année, et C étant mort dans une des années précédentes. Les probabilités respectives de ces six événemens sont, pour la seconde année,

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{2abc},\ \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{2abc},$$
$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{abc},\ \frac{(a'-a'')b''c''}{abc},\ \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{2ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$
et
$$\frac{(a'-a'')b''}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s\ (1 + \rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. Et ainsi de suite pour toutes les années suivantes jusqu'aux dernières limites de la vie humaine : la somme de toutes ces valeurs sera la valeur totale actuelle de la somme proposée, et sera trouvée égale à $s \times A^B$, ou à la valeur actuelle de la somme donnée payable au décès de A, pourvu que cette tête soit la *première* qui s'éteigne des deux têtes A, B; comme nous l'avons trouvé par le problème XXVII. La vérité de cette conséquence est évidente, car un seul événement s'opposerait au paiement de la somme proposée, et ce serait que B mourût avant A (1).

PROBLÈME XLIV.

304. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que cette tête soit la *seconde* ou la *troisième* qui s'éteigne de trois têtes données A, B, C, et pourvu que C meure avant B.

(1) Il n'est pas inutile de remarquer ici que la valeur trouvée au moyen de ce problème est égale à la somme des valeurs trouvées au moyen des problèmes XXIX et XLI : cette coïncidence est une preuve de l'exactitude de l'opération.

SOLUTION.

La somme proposée peut être reçue à la fin de la première année, si l'un de ces deux événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes s'éteindront dans l'année, C étant mort le premier ; 2°. ou A et C mourront dans l'année, C étant mort le premier, et B vivant encore à la fin de l'année. Les probabilités respectives de ces événemens sont

$$\frac{(a-a').(b'-b')(c-c')}{3abc} \quad \text{et} \quad \frac{(a-a')(c-c')b'}{2abc};$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme proposée peut être reçue si l'un de cinq différens événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, C étant mort le premier; 2°. ou A et C mourront dans l'année, C étant mort le premier et B vivant encore à la fin de l'année; 3°. ou A et B mourront dans l'année, C étant mort dans une des années précédentes; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, B vivant encore à la fin de l'année, et C étant mort dans une des années précédentes; 5°. ou seulement A mourra dans l'année, et B *et* C *seront morts dans les années précédentes, C étant mort le premier*. Les probabilités respectives

ces événemens sont, pour la seconde année,

$$\frac{(a'-a'')(b'-b'')(c'-c'')}{3abc},\ \frac{(a'-a'')(c'-c'')b''}{2abc},$$
$$\frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),\ \frac{(a'-a'')\,b''}{bc}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$
$$\frac{(a'-a'')}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

›ressions qui, étant ajoutées ensemble et multi-
ées par $s\,(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a
recevoir la somme à la fin de la seconde année. De
nême manière nous trouverons les espérances qu'on
e recevoir la somme à la fin de la troisième année
de toutes les années suivantes, et si l'on réduit
diverses espérances annuelles à leur plus simple
›ression, et qu'on les dispose les unes sous les autres,
:s formeront quatorze séries collatérales, dont la
nme des n premiers termes variera selon l'âge
nparatif des têtes en question.

305. Ier cas. Soit A la plus vieille des trois têtes.
ns ce cas les termes des diverses séries dont nous
rlons doivent être continués jusqu'aux dernières
iites de la vie humaine, puisque la tête A se trouve
pliquée dans chacune d'elles : donc la somme en
'a égale à s multiplié par

$$\frac{-\rho A}{(1+\rho)}+\frac{1+AB}{2(1+\rho)}-\frac{1+A'B}{2(1+\rho)}.\frac{a'}{a}-\frac{1+AC}{2(1+\rho)}+\frac{1+A'C}{2(1+\rho)}.\frac{a'}{a}$$
$$\frac{1-\rho ABC}{6(1+\rho)}+\frac{1+A'BC}{6(1+\rho)}.\frac{a'}{a}-A_{,}BC.\frac{a_{,}}{6a}+\frac{1+AB'C}{6(1+\rho)}.\frac{b'}{b}$$
$$AB_{,}C.\frac{b_{,}}{3b}-\frac{1+ABC'}{3(1+\rho)}.\frac{c'}{c}-ABC_{,}.\frac{c_{,}}{6c};$$

expression qui, indépendamment du multiplicateur commun s, peut se réduire, comme dans les cas précédens, à

$$\frac{2 - \varrho(3A - ABC) + 3AB - 3AC}{6(1+\varrho)} + \frac{1}{6a}$$
$$\times \left[\frac{(1 - 3A'B + 3A'C + A'BC)a'}{(1+\varrho)} - A_{,}BC.a_{,}\right]$$
$$+ \frac{1}{6b} \times \left[\frac{(1 + AB'C)b'}{(1+\varrho)} + AB_{,}C.2b_{,}\right]$$
$$- \frac{1}{6c}\left[\frac{(1 + ABC')2c'}{(1+\varrho)} + ABC_{,}.c_{,}\right];$$

et que je représenterai par $\mathfrak{G}$.

Donc quand A est la plus vieille tête, la valeur demandée sera représentée par $s \times \mathfrak{G}$.

306. IIᵉ CAS. Soit B la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas les n premiers termes des diverses séries collatérales précitées seront égaux à

$$\mathfrak{G} - \frac{1 - \varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} + \frac{1 + A^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$- \frac{1 + A'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de B les espérances de toutes les années suivantes peuvent être exprimées plus correctement au moyen du premier lemme du chapitre V; car puisque la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une quelconque de ces années dépend de la mort de A dans l'année, C étant mort

avant B dans une des années précédentes (on a vu dans le lemme que la probabilité de cette dernière condition est représentée par $1 - \varphi$), nous trouverons que la somme des espérances de ces années, continuées jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, est égale à

$$s.(1 - \varphi) \times \frac{1 - A^0}{(1+\varrho)} \cdot \frac{a}{a}(1 + \rho)^{-n}.$$

Par conséquent cette valeur, ajoutée à la somme des n premiers termes de la série trouvée plus haut, exprimera la valeur totale actuelle de la somme donnée dans le cas proposé : cette valeur sera trouvée égale à $s.(\mathfrak{G} + x)$.

307. IIIe cas. Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas les n premiers termes des diverses séries collatérales précitées seront égaux à

$$\mathfrak{G} - \frac{1 - \varrho A^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a}{a}(1 + \rho)^{-n} - \frac{1 + A^0 B^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a\beta}{ab}(1 + \rho)^{-n}$$
$$+ \frac{1 + A'^0 B^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{a'\beta}{ab}(1 + \rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de C, la chance qu'on a de recevoir la somme proposée à la fin d'une quelconque des années suivantes dépendra seulement de la mort de A dans l'année, C étant mort avant B dans une des années précédentes; donc la somme des espérances de toutes les années suivantes sera représentée comme dans le cas précédent par

$$s(1 - \varphi) \times \frac{1 - A^0}{(1+\varrho)} \cdot \frac{a}{a}(1 + \rho)^{-n}.$$

Par conséquent cette valeur, ajoutée à la somme des n premiers termes de la série trouvée plus haut représentera la valeur totale actuelle de la somme donnée dans le cas proposé : cette valeur sera trouvée égale à $s\,(\mathfrak{G} + z)$ (1).

Corollaire.

308. Quand les trois têtes sont égales, ou du même âge que A, les trois dernières quantités de la formule représentée par $\mathfrak{G}$ se détruisent l'une l'autre, et l'expression générale devient alors

$$s \times \frac{2 - \varrho\,(3A - AAA)}{6(1+\varrho)}.$$

PROBLÈME XLV.

309. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A, pourvu que cette tête soit la *première* ou la *dernière* qui s'éteigne de trois têtes données A,B,C, et pourvu que C, dans le dernier cas, meure avant B.

---

(1) Il n'est pas inutile de remarquer ici que la valeur obtenue au moyen de ce problème est égale à la somme des valeurs obtenues au moyen des problèmes XLI et XLII; par là se trouve confirmée l'exactitude de ces résultats et des raisonnemens qui y ont conduit.

SOLUTION.

La somme proposée peut être reçue à la fin de la première année si l'un de quatre événemens différents a lieu : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, A étant mort le premier ; ou C étant mort le premier, B le second et A le dernier ; 2°. ou A et B mourront dans cette année, A étant mort le premier et C vivant encore à la fin de l'année ; 3° ou A et C mourront dans l'année, A étant mort le premier et B vivant encore à la fin de l'année ; 4° ou seulement A mourra dans l'année, et B et C vivront encore à la fin de l'année. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont

$$\frac{(a-a').(b-b').(c-c')}{2abc},\ \frac{(a-a').(b-b')c'}{2abc},$$
$$\frac{(a-a').(c-c').b'}{2abc},\ \text{et}\ \frac{(a-a')b'c'}{abc}:$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$ donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes la somme proposée peut être reçue si l'un de six événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, A étant mort le premier ; ou C étant mort le premier, B le second et A le dernier ; 2°. ou A et

B mourront dans l'année, A étant mort le premier, et C vivant encore à la fin de l'année ; 3°. ou A et C mourront dans l'année, A mourant le premier, et B étant encore vivant à la fin de l'année ; 4°. ou seulement A mourra dans l'année, et B et C vivront encore à la fin de l'année ; 5°. ou A et B mourront dans l'année, A étant mort le dernier, et C étant mort dans une des années précédentes ; 6°. ou seulement A mourra dans l'année et *B et C seront morts dans une des années précédentes, C étant mort le premier.* Les probabilités de ces divers événemens pour la seconde année sont respectivement

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{2abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{2abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')b''}{2abc}, \quad \frac{(a'-a'')b''c''}{2ab},$$

$$\frac{(a'-a'')(b'-b'')}{2ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right) \text{ et } \frac{a'-a''}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{c'}{c}\right):$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière, nous pouvons trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes jusqu'à l'extinction de la plus vieille des têtes proposées ; et si ces diverses espérances annuelles sont réduites à leur plus simple expression et disposées les unes sous les autres, elles formeront douze séries collatérales, dont les n premiers termes varieront selon l'âge comparatif des têtes en question.

emens : 1°. ou A mourra après B dans l'année; °. ou seulement A mourra dans l'année, B étant nort après C dans une des années précédentes. La omme des espérances relatives à ces événemens a déjà té trouvée, dans le troisième cas du problème XLII, gale à

$$(1-\varphi) \times \frac{1-\varrho A^{o}}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}$$
$$-\frac{1+A^{o}B^{o}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+A^{o}B^{o} \cdot \frac{\alpha\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+\frac{1+A'^{o}B^{o}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\beta}{ab} \times (1+\rho)^{-n}$$
$$-A'^{o}B^{o}\frac{\alpha\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n}:$$

xpression qui étant ajoutée à la somme des *n* preniers termes des diverses séries collatérales préitées rendra la valeur totale demandée égale à (𝕳 + z) (1).

Corollaire.

313. Quand les trois têtes sont égales ou du même ge que A, les trois dernières quantités de la formule eprésentée par 𝕳 se détruisent mutuellement, et

(1) Il n'est pas inutile de remarquer ici que la valeur trou-'ée au moyen de ce problème est égale à la somme des deux 'aleurs obtenues au moyen des problèmes XXIX et XLII : reuve irrécusable de l'exactitude de l'opération.

diverses séries collatérales précitées sera égale à

$$\mathfrak{S} - \frac{1-\varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+A^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$- \frac{1+A'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de B, la valeur des espérances de toutes les années suivantes peut être plus correctement exprimée, comme dans le second cas du prob. XL par

$$s\,(1-\varphi)\,\frac{1-\varrho\,A^{\circ}}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n},$$

expression qui étant ajoutée à la somme des n premiers termes trouvés ci-dessus, rendra la valeur totale actuelle de la somme donnée, pour le cas où B est la plus vieille des trois têtes, égale à $s\,(\mathfrak{S} + x)$.

312. IIIe cas. Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, les n premiers termes des diverses séries collatérales précitées seront égaux à

$$\mathfrak{S} - \frac{1-\varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - A^{\circ}B^{\circ} \cdot \frac{\alpha\beta}{2ab}(+\rho)^{-n}$$
$$+ A_{,}^{\circ}B^{\circ} \cdot \frac{\alpha_{,}\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de C, la chance qu'on a de recevoir la somme désignée à la fin d'une quelconque des années suivantes dépendra de l'un de deux évé-

ɜmens : 1°. ou A mourra après B dans l'année; . ou seulement A mourra dans l'année, B étant ort après C dans une des années précédentes. La mme des espérances relatives à ces événemens a déjà ɜ́ trouvée, dans le troisième cas du problème XLII, ale à

$$
\begin{aligned}
&(1-\varphi) \times \frac{1-\varrho A^{\circ}}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} \\
&- \frac{1+A^{\circ}B^{\circ}}{2(1+\varrho)} \times \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n} \\
&+ A^{\circ}B^{\circ} \cdot \frac{\alpha\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n} \\
&+ \frac{1+A'^{\circ}B^{\circ}}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\beta}{ab} \times (1+\rho)^{-n} \\
&- A'^{\circ}B^{\circ} \frac{\alpha\beta}{2ab}(1+\rho)^{-n} :
\end{aligned}
$$

pression qui étant ajoutée à la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales prétées rendra la valeur totale demandée égale à ($\mathfrak{H}$ + z) (1).

Corollaire.

313. Quand les trois têtes sont égales ou du même ;e que A, les trois dernières quantités de la formule présentée par $\mathfrak{H}$ se détruisent mutuellement, et

---

(1) Il n'est pas inutile de remarquer ici que la valeur trou- ;e au moyen de ce problème est égale à la somme des deux ileurs obtenues au moyen des problèmes XXIX et XLII : euve irrécusable de l'exactitude de l'opération.

l'expression générale devient dans ce cas égale à

$$s \times \frac{1-\rho(A - AA + AAA)}{2(1+\rho)}.$$

PROBLÈME XLVI.

314. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A *et de* B, pourvu que ces deux têtes soient les *premières* qui s'éteignent de trois têtes données A,B,C.

SOLUTION.

Pour qu'on puisse recevoir la somme à la fin de la première année, il faudra que l'un de ces deux événemens ait lieu : 1° ou toutes les têtes mourront dans l'année, C étant mort le dernier; 2°. ou les deux têtes A et B mourront dans l'année, et C vivra encore à la fin de l'année. Les probabilités respectives de ces deux événemens sont

$$\frac{(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc}, \text{ et } \frac{(a-a').(b-b')c'}{abc},$$

expressions qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais, dans la seconde année et les suivantes, la somme proposée peut être reçue si l'un de six événemens différents a lieu: 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, C étant mort le dernier; 2°. ou et B mourront dans l'année et C vivra encore à la fin de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, étant mort le premier, et B étant mort dans une des années précédentes; 4°. ou B et C mourront dans l'année, B mourant le premier et A étant mort dans une des années précédentes; 5°. ou seulement A mourra dans l'année, C vivant encore à la fin de l'année et B étant mort dans une des années précédentes; 6°. ou seulement B mourra dans l'année, C vivant encore à la fin de l'année, et A étant mort dans une des années précédentes. Les probabilités respectives de ces divers événemens sont pour la seconde année

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc},\quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')}{2ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),\quad \frac{(b'-b'').(c'-c'')}{2bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right),$$

$$\frac{a'-a'')}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),\ \text{et}\ \frac{(b'-b'')c''}{bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right):$$

expressions, qui étant ajoutées ensemble et multipliées par $s\,(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière nous trouverons les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes jusqu'aux

dernières limites de la vie humaine : et, si l'on réduit à leur plus simple expression ces diverses espérances et qu'on les dispose les unes sous les autres, elles formeront seize séries collatérales, dont la somme sera trouve égale à $s\ (A^c + B^c - AB^c)$.

Corollaire.

315. Quand les trois têtes sont toutes égales, ou du même âge que A, cette expression (d'après ce qui a été dit dans le corollaire du problème XXX) devient égale à $s \times \frac{1 - \varrho(3AA - 2AAA)}{3(1 + \varrho)}$: c'est-à-dire égale au tiers de la valeur actuelle de la somme proposée, payable à l'extinction de deux quelconques des trois têtes données.

PROBLÈME XLVII.

Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A *et de* B, pourvu que ces deux têtes soient les *dernières* qui s'éteignent de trois têtes données A,B,C.

SOLUTION.

Il est évident que la somme proposée ne peut être reçue à la fin de la première année que dans le cas

où toutes les têtes s'éteindraient dans l'année, C étant mort le premier. La probabilité de cet événement est $\frac{(a-a').(b-b').(c-c')}{3abc}$, expression qui multipliée par $s(1+\rho)^{-1}$ donnera l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme proposée peut être reçue si l'un de quatre différens événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, C étant mort le premier; 2°. ou A et B mourront dans l'année, C étant mort dans une des années précédentes; 3°. ou seulement A mourra dans l'année, et B *et* C *seront morts dans une des années précédentes*, B *étant mort le dernier;* 4°. ou seulement B mourra dans l'année, et A *et* C *seront morts dans une des années précédentes*, A *étant mort le dernier.* Les probabilités de ces divers événemens, pour la seconde année, sont respectivement

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{3abc}, \quad \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

$$\frac{a'-a''}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right) \text{ et } \frac{b'-b''}{2b}\left(1-\frac{a'}{a}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. On trouverait de la même manière les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes; et si l'on réduit ces diverses espérances à leur plus simple ex-

pression, et qu'on les dispose les unes sous les autres, elles formeront dix-neuf séries collatérales, dont la somme, si on les continue jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, sera égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)}+\frac{1-\varrho B}{2(1+\varrho)}+AB-\frac{1+A'B}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}-\frac{1+AB'}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$-\frac{1+AC}{2(1+\varrho)}+\frac{1+A'C}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}-\frac{1+BC}{2(1+\varrho)}+\frac{1+B'C}{2(1+\ )}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$+\frac{1-\varrho ABC}{3(1+\varrho)}+\frac{1+A'BC}{6(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}+A_{,}BC\frac{a_{,}}{3a}+\frac{1+AB'C}{6(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$+AB_{,}C\cdot\frac{b_{,}}{3b}-\frac{1+ABC'}{3(1+\varrho)}\cdot\frac{c'}{c}-ABC_{,}\cdot\frac{2c_{,}}{3c};$$

expression qui, indépendamment du multiplicateur commun s, peut se réduire à

$$\frac{2-\varrho(3A+3B+2ABC)-3AB-3BC}{6(1+\varrho)}+AB$$
$$+\frac{1}{6a}\left[\frac{(1-3AB+3A'C+A'BC)a'}{(1+\varrho)}+A_{,}BC\,.\,2a_{,}\right]$$
$$+\frac{1}{6b}\times\left[\frac{(1-3AB'+3B'C+AB'C)b'}{(1+\varrho)}+AB_{,}C\,.\,2b_{,}\right]$$
$$-\frac{1}{3c}\times\left[\frac{(1+ABC')c'}{(1+\varrho)}+ABC_{,}\,.\,2c_{,}\right],$$

et que je représenterai par $\mathfrak{I}$.

317. Ier cas. Soit A la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées sera égale à

$$\mathfrak{I}-\frac{1-\varrho B^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}+\frac{1+B^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}$$
$$-\frac{1+B'^{\circ}C^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta'\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de A, la somme des espérances le toutes les années suivantes sera, comme dans le premier cas du problème XL, exprimée plus correctement par

$$s(1-\varpi)\times\frac{1-\varrho B^\circ}{(1+\varrho)}\times\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n};$$

xpression qui, étant ajoutée aux n premiers termes que nous venons de trouver, rendra la valeur totale actuelle demandée, quand A est la plus vieille es trois têtes, égale à $s(\Im+\nu)$.

318. IIᵉ cas. Soit B la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des iverses séries collatérales précitées sera égale à

$$\Im-\frac{1-\varrho A^\circ}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}+\frac{1+A^\circ C^\circ}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$-\frac{1+A'^\circ C^\circ}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de B, la somme des espérances le toutes les années suivantes sera, comme dans le second cas du problème XL, plus correctement exprimée par

$$s(1-\varphi)\times\frac{1-\varrho A^\circ}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n};$$

xpression qui, étant ajoutée aux n premiers termes que nous venons de trouver, rendra la valeur demandée, quand B est la plus vieille tête, égale à $s(\Im+x)$.

319. IIIe cas. Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées sera égale à

$$\mathfrak{J} - \frac{1-\varrho A^\circ}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - \frac{1-\varrho B^\circ}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}$$
$$- A^\circ B^\circ \cdot \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+A'^\circ B^\circ}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ \frac{1+A^\circ B'^\circ}{2(1+\varrho)} \times \frac{\alpha\beta'}{ab}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de C, la somme des espérances de toutes les années suivantes sera, comme dans le troisième cas du problème XL, plus correctement exprimée par s multiplié par

$$(1-\varphi) \times \frac{1-\varrho A^\circ}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ (1+\varpi) \times \frac{1-\varrho B^\circ}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}$$
$$- \frac{1+A^\circ B^\circ}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ A^\circ B^\circ \cdot \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n};$$

expression qui, étant ajoutée aux n premiers termes déjà trouvés, rendra la valeur demandée, quand C est la plus vieille tête, égale à $s\,(\mathfrak{J} + y + z)$.

Corollaire.

320. Quand toutes les têtes sont égales ou du même âge que A, les trois dernières quantités de la formule

ésentée par 3 se détruisent l'une l'autre, et l'expsion générale devient, dans ce cas, égale à

$$s \times \frac{1 - \varrho(3A - 3AA + AAA)}{3(1 + \varrho)},$$

-à-dire égale au tiers de la valeur actuelle de la me proposée, payable au dernier décès des trois

PROBLÈME XLVIII.

21. Déterminer la valeur actuelle d'un capital ble au décès de A *et de* B, pourvu que ces deux soient la *première* et la *dernière* qui s'éteit de trois têtes données A, B, C.

SOLUTION.

somme proposée ne peut être reçue à la fin de emière année que si les trois têtes meurent dans année, C étant mort le second. La probabilité t événement est

$$\frac{(a - a').(b - b').(c - c')}{3abc};$$

ession qui, étant multipliée par $s(1 + \rho)^{-1}$,

collatérales dont nous parlons seront égaux à

$$\mathfrak{A} - \frac{1-\varrho B^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b} (1+\rho)^{-n} - B^0 C^0 \cdot \frac{\beta\gamma}{2bc} \times (1+\rho)^{-n}$$
$$+ B^0 C_{,}^0 \cdot \frac{\beta_{,}\gamma}{2bc} (1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de A, la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une des années suivantes dépendra de l'un de deux différens événemens : 1°. ou B et C mourront tous deux dans l'année, B étant mort le dernier ; 2°. ou seulement B mourra dans l'année, C étant mort après A dans une des années précédentes. Les probabilités de ces deux événemens, pour la $(n+1)^e$ année, sont respectivement

$$\frac{(\beta - \beta') (\gamma - \gamma')}{2bc} \text{ et } \frac{\beta - \beta'}{b} \left(\varpi - \frac{\gamma}{c}\right),$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-(n+1)}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+1)^e$ année.

De la même manière, les probabilités respectives de ces deux événemens, pour la $(n+2)^e$ année, sont

$$\frac{(\beta' - \beta'') (\gamma' - \gamma'')}{2bc} \text{ et } \frac{\beta' - \beta''}{b} \left(\varpi - \frac{\gamma'}{c}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-(n+2)}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+2)^e$ année; et ainsi de suite pour toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine : la somme de toutes ces espérances annuelles sera trou-

égale à *s* multiplié par

$$r \times \frac{1-\varrho B^\circ}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n} - \frac{1+B^\circ C^\circ}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}$$

$$+ B^\circ C^\circ \cdot \frac{\beta\gamma}{2bc}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+B'^\circ C^\circ}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta'\gamma}{bc}(1+\rho)^{-n}$$

$$- B_{,}^\circ C^\circ \cdot \frac{\beta_{,}\gamma}{2bc}(1+\rho)^{-n}:$$

:ette formule étant ajoutée aux *n* premiers termes diverses séries collatérales précitées, rendra la eur totale actuelle de la somme proposée, quand st la plus vieille tête, égale à s ($\mathfrak{R} - v$).

523. IIe CAS. Soit B la plus vieille des trois têtes. ıs ce cas, les *n* premiers termes des diverses séries latérales précitées seront égaux à

$$\mathfrak{R} - \frac{1-\varrho A^\circ}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - A^\circ C^\circ \cdot \frac{\alpha\gamma}{2ac}(1+\rho)^{-n}$$

$$+ A_{,}^\circ C^\circ \cdot \frac{\alpha_{,}\gamma}{2ac}(1+\rho)^{-n}.$$

ıs après le décès de B, la chance qu'on a de recer la somme à la fin d'une des années suivantes déıdra de l'un de deux événemens différens : ou A C mourront dans l'année; A étant mort le dernier; ou seulement A mourra dans l'année, C étant ırt après B dans une des années précédentes. Les ›babilités de ces deux événemens, pour la $(n+1)^e$ née, sont respectivement

$$\frac{(\alpha-\alpha').(\gamma-\gamma')}{2ac} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha-\alpha'}{a}\left(\varphi - \frac{\gamma}{c}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-(n+1)}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+1)^e$ année.

De la même manière nous pourrons trouver les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+2)^e$ année et de toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine; et la somme de toutes ces espérances annuelles sera trouvée égale à s multiplié par

$$\varphi \times \frac{1-\varrho A^0}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - \frac{1+A^0C^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ A^0C^0 \cdot \frac{\alpha\gamma}{2ac}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+A'^0C^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$- A_{,}^0C^0 \cdot \frac{\alpha_{,}\gamma}{2ac}(1+\rho)^{-n};$$

formule qui, étant ajoutée aux n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, rendra la valeur totale actuelle de la somme proposée, quand B est la plus vieille des trois têtes, égale à $s(\mathfrak{A} - x)$.

324. IIIe cas. Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées sera égale à

$$\mathfrak{A} - \frac{1-\varrho A^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} - \frac{1-\varrho B^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ \frac{1+A^0B^0}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n} - \frac{1+A'^0B^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$- \frac{1+A^0B'^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha\beta'}{ab}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de C, la chance qu'on a de recevoir la somme à la fin d'une des années suivantes dépendra de l'un de deux événemens différens : 1°. ou seulement A mourra dans l'année, C étant mort après B dans une des années précédentes (la probabilité de cette dernière condition sera maintenant représentée par φ); 2°. ou seulement B mourra dans l'année, C étant mort après A dans une des années précédentes (la probabilité de cette dernière condition sera maintenant représentée par ϖ). Par conséquent la somme des espérances relatives à ces événemens, continuées jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, sera égale à

$$s.\varphi \times \frac{1-\varrho A^0}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}$$
$$+ s.\varpi \times \frac{1-\varrho B^0}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n};$$

expressions qui, étant ajoutées à la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, rendront la valeur totale actuelle de la somme proposée, quand C est la plus vieille tête, égale à $s(\mathfrak{K} - y - z)$ (1).

---

(1) Il ne sera pas inutile de remarquer ici que la somme des valeurs actuelles obtenues au moyen des probl. XLVI, XLVII et XLVIII, est égale à $s \times \frac{1-\varrho(A+B-AB)}{(1+\varrho)}$, c'est-à-dire égale à la valeur actuelle de la somme proposée, payable au dernier décès des deux têtes A, B.

Corollaire.

325. Quand les trois têtes sont égales ou du même âge que A, les trois dernières quantités de la formule représentée par 𝕬 se détruisent l'une l'autre, et l'expression générale devient alors égale à

$$s \times \frac{1 - \varrho(3A - 3AA + AAA)}{3(1 + \varrho)};$$

c'est-à-dire égale au tiers de la valeur actuelle de la somme proposée payable au dernier décès des trois têtes.

PROBLÈME XLIX.

326. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A *et de* B, pourvu que B meure avant une autre tête C.

SOLUTION.

Le paiement de la somme à la fin de la première année dépendra de l'un de ces deux événemens : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, B étant mort avant C; 2°. ou seulement A et B mourront dans l'année, C vivant encore à la fin de l'année. Les

'obabilités respectives de ces deux événemens sont

$$\frac{(a-a')\,(b-b')\,(c-c')}{2abc} \text{ et } \frac{(a-a')\,(b-b')c'}{abc};$$

:pressions qui, étant ajoutées ensemble et multi- iées par $s(1+\rho)^{-1}$, donneront l'espérance qu'on de recevoir la somme à la fin de la première née.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la mme proposée peut être reçue si l'un de sept dif- 'ens événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes mour- nt dans l'année, B étant mort avant C; 2°. ou A B mourront dans l'année, et C vivra encore à la ı de l'année; 3°. ou A et C mourront dans l'année, ɜtant mort dans une des années précédentes; 4°. ou et C mourront dans l'année, B étant mort le pre- ier et A étant mort dans une des années précé- ntes; 5°. ou seulement A mourra dans l'année, étant mort dans une des années précédentes, et C vant encore à la fin de l'année; 6°. ou seulement B ɔurra dans l'année, C vivant encore à la fin de nnée, et A étant mort dans une des années pré- dentes; 7°. ou seulement A mourra dans l'année, *B et C seront morts dans une des années précé- ntes, B étant mort le premier.* Les probabilités spectives de ces événemens, pour la seconde an- 'e, sont

$$\frac{(a'-a'').(b'-b'').(c'-c'')}{2abc}, \frac{(a'-a'').(b'-b'')c''}{abc},$$

$$\frac{(a'-a'').(c'-c'')}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),\ \frac{(b'-b'').(c'-c'')}{2bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right),$$
$$\frac{(a'-a'')c''}{ac}\left(1-\frac{b'}{b}\right),\ \frac{(b'-b'')c''}{bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right)$$
et $$\frac{(a'-a'')}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière on trouvera les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes, jusqu'à l'extinction de la plus vieille tête, et si l'on réduit ces espérances annuelles à leur plus simple expression, et qu'on les dispose les unes sous les autres, elles formeront quatorze séries collatérales, dont les n premiers termes varieront selon l'âge comparatif des têtes en question.

327. Ier CAS. Soit A la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, les n premiers termes des diverses séries collatérales précitées seront égaux à la somme des termes continués jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, parce que la tête A se trouve impliquée dans chaque série. Donc leur valeur sera égale à s multiplié par

$$\frac{1-\rho A}{2(1+\rho)}-\frac{1+AB}{2(1+\rho)}+\frac{1+A'B}{2(1+\rho)}.\frac{a'}{a}+\frac{1+AC}{2(1+\rho)}-\frac{1+A'C}{2(1+\rho)}.\frac{a'}{a}$$
$$+\frac{1-\rho BC}{2(1+\rho)}-\frac{1+B'C}{2(1+\rho)}.\frac{b'}{b}+B_{,}C.\frac{b_{,}}{2b}-\frac{1-\rho ABC}{2(1+\rho)}$$
$$+AB_{,}C.\frac{b_{,}}{2b}+ABC_{,}.\frac{c_{,}}{2c}.$$

ns cette expression peut se réduire à

$$\frac{-\varrho(A+BC-ABC)-AB+AC}{2(1+\varrho)}+\frac{(A'B-A'C)\alpha'}{2(1+\varrho)a}$$
$$\frac{1}{2b}\left[\frac{(1+B'C)b'}{(1+\varrho)}-(B_{,}C-AB_{,}C)_{,}.b_{,}\right]+ABC_{,}.\frac{c_{,}}{2c};$$

mule que je représenterai par $\mathfrak{C}$. Donc quand A la plus vieille tête, la valeur actuelle demandée représentée par $s \times \mathfrak{C}$.

328. IIe CAS. Soit B la plus vieille des trois têtes. ns ce cas, les n premiers termes des diverses séries latérales précitées seront égaux à

$$\mathfrak{C}-\frac{1-\varrho A^{o}}{2(1+\varrho)}.\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}-\frac{1+A^{o}C^{o}}{2(1+\varrho)}.\frac{\alpha\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}$$
$$+\frac{1+A'^{o}C^{o}}{2(1+\varrho)}\times\frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}.$$

is après le décès de B, la somme des espérances de ites les années suivantes, continuées jusqu'aux nières limites de la vie humaine, sera (comme is le second cas du problème XXXIX) égale à

$$s.\varphi\times\frac{1-\varrho A^{o}}{(1+\varrho)}.\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n};$$

pression qui, étant ajoutée à la somme des n preiers termes des diverses séries collatérales préci:s, rendra la valeur totale actuelle de la somme oposée égale à $s(\mathfrak{C}-x)$.

329. IIIe CAS. Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, les n premiers termes des diverses séries collatérales précitées seront égaux à

$$\mathfrak{C} - \frac{1-\varrho A^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n} + \frac{1+A^0B^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$- \frac{1+A'^0B^0}{2(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de C, la somme des espérances de toutes les années suivantes peut être plus convenablement exprimée, comme dans le cas précédent, par

$$s.\varphi \times \frac{1-\varrho A^0}{(1+\varrho)} \cdot \frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n};$$

expression qui, étant ajoutée aux n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, rendra la valeur totale actuelle de la somme donnée, dans le cas proposé, égale à $s\,(\mathfrak{C} - z)$.

Corollaire.

330. Quand les trois têtes sont égales ou du même âge que A, les trois dernières quantités de la formule représentée par $\mathfrak{C}$ se détruisent l'une l'autre, et l'expression générale devient égale à

$$s \times \frac{1-\varrho(A + AA - AAA)}{2(1+\varrho)}.$$

PROBLÈME L.

331. Déterminer la valeur actuelle d'un capital payable au décès de A *et de* B, pourvu qu'une autre tête C meure avant B.

SOLUTION.

Le paiement du capital désigné à la fin de la première année ne dépendra que d'un seul événement; il faudra que toutes les têtes s'éteignent dans l'année, C étant mort avant B. La probabilité de cet événement est

$$\frac{(a - a')(b - b')(c - c')}{2abc};$$

expression qui, multipliée par $s(1 + \rho)^{-1}$, donnera l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la première année.

Mais dans la seconde année et les suivantes, la somme proposée peut être reçue si l'un de cinq différens événemens a lieu : 1°. ou toutes les têtes mourront dans l'année, C étant mort avant B; 2°. ou A et B mourront dans l'année, C étant mort dans une des années précédentes; 3°. ou B et C mourront dans l'année, C mourant le premier, et A étant mort dans

une des années précédentes; 4°. ou seulement B mourra dans l'année, et A et C seront morts dans une des années précédentes; 5°, ou seulement A mourra dans l'année, et B *et C seront morts dans une des années précédentes, B étant mort le dernier.* Les probabilités respectives de ces divers événemens, pour la seconde année, sont

$$\frac{(a'-a'')(b'-b'')(c'-c'')}{2abc}, \frac{(a'-a'').(b'-b'')}{ab}\left(1-\frac{c'}{c}\right),$$
$$\frac{(b'-b'').(c'-c'')}{2bc}\left(1-\frac{a'}{a}\right), \frac{(b'-b'')}{b}.\left(1-\frac{a'}{a}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right)$$
et $$\frac{a'-a''}{2a}\left(1-\frac{b'}{b}\right).\left(1-\frac{c'}{c}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s(1+\rho)^{-2}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la seconde année. De la même manière nous trouverons les espérances qu'on a de recevoir la somme à la fin de la troisième année et de toutes les années suivantes, jusqu'à l'extinction de la plus vieille tête; et si l'on réduit ces espérances annuelles à leur plus simple expression, et qu'on les dispose les unes sous les autres, elles formeront dix-sept séries collatérales, dont les n premiers termes varieront selon l'âge comparatif des têtes en question.

332. Ier CAS. Soit A la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, les diverses séries collatérales dont nous parlons doivent être continuées jusqu'aux dernières limites de la vie humaine puisque la tête A se

rouve impliquée dans chacune d'elles : donc leur somme sera égale à s multiplié par

$$\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)}+\frac{1-\varrho B}{2(1+\varrho)}-\frac{1+AB}{2(1+\varrho)}+AB-\frac{1+A'B}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}$$
$$-\frac{1+AC}{2(1+\varrho)}+\frac{1+A'C}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{a'}{a}-\frac{1-\varrho BC}{2(1+\varrho)}+\frac{1+B'C}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{b'}{b}$$
$$-B_{,}C.\frac{b_{,}}{2b}+\frac{1-\varrho ABC}{2(1+\varrho)}+AB_{,}C.\frac{b_{,}}{2b}-ABC_{,}.\frac{c_{,}}{2c}.$$

Mais cette expression peut se réduire à

$$\frac{1-\varrho(A+2B-2AB-BC+ABC)+AB-AC}{2(1+\varrho)}-\frac{(A'B-A'C)a'}{2(1+\varrho)a}$$
$$+\frac{1}{2b}\times\left[\frac{(1+B'C)b'}{(1+\varrho)}-(B_{,}C-AB_{,}C.)b_{,}\right]-ABC_{,}.\frac{c_{,}}{2c};$$

formule que je représenterai par $\mathfrak{M}$. Conséquemment quand A est la plus vieille tête, la valeur demandée est représentée par $s\times\mathfrak{M}$.

333. IIe cas. Soit B la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées sera égale à

$$\mathfrak{M}-\frac{1-\varrho A^{0}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}+\frac{1+A^{0}C^{0}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha\gamma}{ac}\cdot(1+\rho)^{-n}$$
$$-\frac{1+A'^{0}C^{0}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha'\gamma}{ac}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de B, la somme des espérances de toutes les années suivantes sera plus correcte-

ment exprimée, comme dans le second cas du problème XL, par

$$s(1-\varphi)\times\frac{1-\varrho A^{\circ}}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n};$$

expression qui, étant ajoutée à la somme des n premiers termes des diverses séries collatérales précitées, rendra la valeur totale actuelle de la somme donnée, quand B est la plus vieille tête, égale à $s(\mathfrak{M}+x)$.

334. IIIe CAS. Soit C la plus vieille des trois têtes. Dans ce cas, les n premiers termes des diverses séries collatérales précitées seront égaux à

$$\mathfrak{M}-\frac{1-\varrho A^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}-\frac{1-\varrho B^{\circ}}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}$$
$$+\frac{1+A^{\circ}B^{\circ}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}-A^{\circ}B^{\circ}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}$$
$$+\frac{1+A'^{\circ}B^{\circ}}{2(1+\rho)}\times\frac{\alpha'\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}.$$

Mais après le décès de C, la chance qu'on a de recevoir la somme proposée à la fin d'une des années suivantes dépendra de l'un de trois événemens différens : 1°. ou A et B mourront dans l'année ; 2°. ou seulement B mourra dans l'année, A étant mort dans une des années précédentes ; 3°. ou seulement A mourra dans l'année, B étant mort après C dans une des années précédentes. Les probabilités respectives de ces événemens, pour la $(n+1)$^e^ année, sont

$$\frac{(\alpha-\alpha')\,(\beta-\beta')}{ab},\ \frac{(\beta-\beta')}{b}\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)\text{ et }\frac{\alpha-\alpha'}{a}\left(1-\varphi-\frac{\beta}{b}\right);$$

expressions qui, étant ajoutées ensemble et multipliées par $s\,(1+\rho)^{-(n+1)}$, donneront l'espérance qu'on a de recevoir la somme à la fin de la $(n+1)^e$ année.

On trouvera de la même manière les espérances de la $(n+2)^e$ année et de toutes les années suivantes, jusqu'aux dernières limites de la vie humaine, et leur somme sera égale à s multiplié par

$$(1-\varphi)\times\frac{1-\varrho A^{o}}{2(1+\varrho)}\cdot\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}+\frac{1-\varrho B^{o}}{(1+\varrho)}\cdot\frac{\beta}{b}(1+\rho)^{-n}$$
$$-\frac{1+A^{o}B^{o}}{(1+\varrho)}\times\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n}+A^{o}B^{o}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}(1+\rho)^{-n};$$

formule qui, ajoutée aux n premiers termes des diverses séries collatérales trouvées plus haut, rendra la valeur totale actuelle de la somme proposée, quand C est la plus vieille tête, égale à $s\,(\mathfrak{M}+z)$.

Corollaire.

335. Quand toutes les têtes sont égales ou du même âge que A, les trois dernières quantités de la formule représentée par $\mathfrak{M}$ se détruisent l'une l'autre et l'expression générale devient alors égale à

$$s\times\frac{1-\varrho\,(3A-3AA+AAA)}{2\,(1+\varrho)};$$

c'est-à-dire égale à la moitié de la valeur actuelle de la somme proposée, payable au dernier décès des trois têtes.

Scolie.

336. Puisque la somme des valeurs actuelles de la somme proposée trouvées par les deux derniers problèmes est égale à

$$s \times \frac{1 - \varrho(A + B - AB)}{(1 + \varrho)}$$

ou à la valeur actuelle de la somme proposée, payable au dernier décès des deux têtes A, B, il s'ensuit que la valeur actuelle d'une d'elles étant trouvée, on obtiendra aisément par une simple soustraction la valeur actuelle de l'autre.

CHAPITRE IX.

DE L'HYPOTHÈSE DE M. DE MOIVRE.

337. Si les décroissemens de la vie, dans une le quelconque d'observations, étaient égaux et iformes depuis la naissance jusqu'aux dernières iites de la vie humaine, les nombres de vivans liqués par cette table à tous les âges successifs, seent les termes d'une progression arithmétique déissante. Or, bien que cette supposition ne soit pas icte pendant toute la durée de la vie, cependant is beaucoup de tables d'observations (particulièrent celle de Northampton) on voit que vers les s intermédiaires les décroissemens sont, pendant grand nombre d'années consécutives, constans et iformes, ou au moins à peu de chose près, et c'est cette observation que M. de Moivre fonda son génieuse hypothèse que « *les décroissemens de la vie sont en progression arithmétique.* » En ef-, il imagina que les différences en moins d'un té compenseraient les différences en plus d'un autre,

et il en conclut que, quoique les valeurs déduites de ce principe ne pussent pas être strictement vraies, du moins l'erreur commise ne serait pas très sensible. Pour faire servir cette hypothèse au calcul des valeurs des annuités viagères, il était nécessaire de supposer l'étendue de la vie limitée à un certain laps de temps, que, pour des raisons que des observations ultérieures ont montré n'être pas bien fondées, il fixa à 86 ans; remarquant toutefois, en même temps, que les exemples de personnes vivantes au-delà de cet âge sont trop rares pour mériter d'entrer en considération dans un aperçu général de cette matière.

Dr Price et M. Morgan ont beaucoup discouru dans ces dernières années sur cette hypothèse; le second, en particulier, s'est montré fort sévère dans ses observations sur les applications auxquelles elle se prête. Il est vrai que des découvertes plus récentes ont montré qu'on ne peut pas *toujours* se fier à elle, et les grands travaux exécutés par ces auteurs pour déduire les valeurs des annuités d'*observations exactes* et rendre par là superflu l'usage de l'hypothèse, peuvent excuser en quelque façon la manière hautaine et dédaigneuse dont il l'ont considérée.

Néanmoins l'hypothèse elle-même est encore d'un usage très étendu dans la théorie des annuités, et demeurera toujours comme un monument de l'esprit ingénieux de son illustre inventeur.

338. On doit surtout remarquer que le principal avantage de l'hypothèse de M. de Moivre est de faci-

er considérablement la détermination de la valeur tuelle des annuités sur une tête ou un groupe de usieurs têtes. La méthode dont nous nous sommes rvis pour déduire ces valeurs dans le premier problème de cet ouvrage, est extrêmement laborieuse voyez page 21), puisque les numérateurs des fractions qui composent la série ne décroissent pas d'une manière régulière. Mais quand ces numérateurs sont n progression arithmétique, la somme de toute la série peut être exprimée par une formule générale, t il ne faudra pas plus de temps pour en trouver la aleur que pour calculer un seul terme de l'autre série dont nous venons de parler.

Quoique M. de Moivre, dans l'application de ses principes aux questions pratiques, ait supposé que e dernier terme de la vie humaine est 86 ans, c'est-à-dire que sur 86 personnes prises au moment de leur naissance, il en mourra une annuellement, jusqu'à ce qu'elles soient toutes éteintes; cependant ce nombre ne découle pas nécessairement de son hypothèse, et tout autre âge pourrait lui être substitué si on le trouvait plus d'accord avec des observations réelles. En prenant toutefois la même limite que M. de Moivre, il est évident que le nombre d'individus vivans à un âge quelconque sera égal au nombre d'années comprises entre cet âge et 86; c'est ce nombre qu'il appelle le *complément de vie* d'une tête. Conséquemment dans cette *hypothèse*, a, b, c,.... seront les complémens de vie des têtes A, B, C,.... respectivement, ou seront égaux au différences comprises entre leurs âges respectifs et 86.

339. D'après cela, on verra clairement que l'expression

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a'}{(1+\varrho)}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]$$

qui, dans le problème I, corollaire 1, désigne la valeur d'une annuité sur la tête A, deviendra

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a-1}{(1+\varrho)}+\frac{a-2}{(1+\varrho)^2}+\frac{a-3}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{a-a}{(1+\varrho)^a}\right],$$

or cette série peut être divisée en deux autres, dont la première est

$$\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{1}{(1+\varrho)^2}+\frac{1}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{1}{(1+\varrho)^a}\right],$$

et la seconde qui doit en être retranchée est

$$\frac{1}{a}\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{2}{(1+\varrho)^2}+\frac{3}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{a}{(1+\varrho)^a}\right].$$

Mais la première, que je représenterai par y, est égale à la valeur actuelle d'une annuité certaine pendant l'espace a, et la dernière est égale à

$$\frac{1}{a}\times\frac{1+y-(a+1).(1+\varrho)^{-a}}{\varrho};$$

par conséquent la valeur totale actuelle de l'annuité est, dans cette hypothèse, égale à

$$y-\frac{1+y-(a+1).(1+\varrho)^{-a}}{a\varrho}=\frac{a-(1+\varrho)y}{a\varrho}.$$

340. De la même manière, l'expression

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{a'b'}{(1+\varrho)}+\frac{a''b''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]$$

ıi représente la valeur d'une annuité sur un groupe :deux têtes A B, deviendra, dans cette hypothèse,

$$\left[\frac{(a-1).(b-1)}{(1+\varrho)}+\frac{(a-2).(b-2)}{(1+\varrho)^2}+\frac{(a-3).(b-3)}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{(a-b).(b-b)}{(1+\varrho)^b}\right],$$

rie qui ne doit comprendre que b termes, B étant la us vieille des deux têtes. Mais si l'on développe, en 'ectuant la multiplication, les numérateurs des ıctions composant cette série, l'expression entière :ut se diviser en trois autres séries distinctes, qui nt

$$\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{1}{(1+\varrho)^2}+\frac{1}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{1}{(1+\varrho)^b}\right]$$

$$-\frac{a+b}{ab}\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{2}{(1+\varrho)^2}+\frac{3}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{b}{(1+\varrho)^b}\right]$$

$$-\frac{1}{ab}\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{4}{(1+\varrho)^2}+\frac{9}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{b^2}{(1+\varrho)^b}\right].$$

ıa première de ces séries est égale à la valeur actuelle 'une annuité certaine pendant l'espace b, et je la eprésenterai par y; la seconde est, d'après ce qui a :té dit plus haut, égale à

$$-\frac{a+b}{ab}\times\frac{1+y-(b+1).(1+\varrho)^{-b}}{\varrho};$$

et la troisième est égale à

$$\frac{1}{ab\varrho}\left[1+y+2\times\frac{1+y-(b+1).(1+\varrho)^{-b}}{\varrho}-(b+1)^2\times(1+\varrho)^{-b}\right].$$

Conséquemment la valeur totale actuelle de l'annuité sur un groupe de deux têtes est égale à

$$\frac{1}{\varrho}-\frac{1+\varrho}{a\varrho}\times\left[\frac{y}{b}\left(a-b-1-\frac{2}{\varrho}\right)+\frac{2}{\varrho}\right].$$

341. En raisonnant de la même manière, on trouvera que l'expression

$$\frac{1}{abc}\left[\frac{a'b'c'}{(1+\varrho)}+\frac{a''b''c''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''b'''c'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right],$$

qui désigne la valeur d'une annuité sur le groupe de trois têtes A B C, deviendra, dans cette hypothèse, égale à

$$\frac{1}{abc}\left[\frac{(a-1).(b-1).(c-1)}{(1+\varrho)}+\frac{(a-2).(b-2).(c-2)}{(1+\varrho)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(a-3).(b-3).(c-3)}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{(a-c).(b-c).(c-c)}{(1+\varrho)^c}\right];$$

série qui doit être continuée jusqu'à c termes seulement, C étant maintenant la plus vieille tête. Mais la série entière, si l'on développe ses termes, peut se convertir en quatre autres, qui sont

$$\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{1}{(1+\varrho)^2}+\frac{1}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{1}{(1+\varrho)^c}\right].$$

$$\frac{b+ac+bc}{abc}\times\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{2}{(1+\varrho)^2}+\frac{3}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{c}{(1+\varrho)^c}\right]$$
$$+\frac{a+b+c}{abc}\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{4}{(1+\varrho)^2}+\frac{9}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{c^2}{(1+\varrho)^c}\right]$$
$$-\frac{1}{abc}\left[\frac{1}{(1+\varrho)}+\frac{8}{(1+\varrho)^2}+\frac{27}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{c^3}{(1+\varrho)^c}\right].$$

la première de ces séries est égale à la valeur elle d'une annuité certaine pendant l'espace c, ur que je représenterai par y, et les autres peu- être ajoutées de la même manière que dans le précédent; donc la valeur totale actuelle d'une ıité sur les trois têtes réunies est égale à

$$\frac{1}{\varrho}-\frac{1+\varrho}{ab\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\left(2b+2a-c-3-\frac{6}{\varrho}\right)-\frac{2y}{c\varrho}\times\right.$$
$$\left.b+a-2c-3-\frac{3}{\varrho}\right)+\frac{y}{c}(b-c-1).(a-c-1)\Big].$$

42. Mais depuis la publication des tables exactes a valeur des annuités, déduites d'observations ıes, ces formules sont devenues de rare ou de usage, et l'on n'y a presque jamais recours, oins qu'il ne s'agisse de trouver une valeur ap- imative d'une annuité sur des têtes dont les ne se trouvent pas indiqués dans ces tables. ımoins l'hypothèse elle-même est encore d'un ıd usage dans la théorie des annuités, et faci- beaucoup plusieurs calculs qui s'y rattachent, iculièrement lorsque la chance qui fait l'objet problème est *temporaire* seulement, comme on erra évidemment par le problème suivant.

PROBLÈME LI.

343. Trouver la valeur d'une annuité sur une tête donnée, pendant une partie de l'existence de laquelle les décroissemens de la vie sont considérés comme uniformes.

SOLUTION.

Soit A la tête donnée, et n l'intervalle des décroissemens égaux, soient encore a le nombre de personnes vivantes à l'âge de A, et α le nombre de personnes vivantes à un âge plus avancé de n années, et représentons par δ les décroissemens égaux de la vie. Alors la valeur d'une annuité sur cette tête sera représentée par la série

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a-\delta}{(1+\varrho)}+\frac{a-2\delta}{(1+\varrho)^2}+\frac{a-3\delta}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{a-n\delta}{(1+\varrho)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha'}{(1+\varrho)^{n+1}}+\frac{\alpha''}{(1+\varrho)^{n+2}}+\frac{\alpha'''}{(1+\varrho)^{n+3}}+\text{etc.}\right],$$

qui peut se diviser en deux parties,

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a-\delta}{(1+\varrho)}+\frac{a-2\delta}{(1+\varrho)^2}+\frac{a-3\delta}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{a-n\delta}{(1+\varrho)^n}\right]$$
$$+\frac{1}{a}\left[\frac{\alpha'}{(1+\varrho)^{n+1}}+\frac{\alpha''}{(1+\varrho)^{n+2}}+\frac{\alpha'''}{(1+\varrho)^{n+3}}+\text{etc.}\right],$$

dernière de ces séries est, d'après le problème I, rollaire 3, égale à A^d, ou égale à la valeur d'une nuité sur sur la tête A, *différée* de n années; et la emière peut se diviser en deux autres, qui sont

$$\left[\frac{1}{(1+\rho)}+\frac{1}{(1+\rho)^2}+\frac{1}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{1}{(1+\rho)^n}\right]$$
$$-\frac{\delta}{a}\left[\frac{1}{(1+\rho)}+\frac{2}{(1+\rho)^2}+\frac{3}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{n}{(1+\rho)^n}\right],$$

nt on trouvera aisément, d'après ce qui précède, e la somme est égale à

$$y-\frac{\delta}{a\rho}\left[(1+\rho)y-n(1+\rho)^{-n}\right].$$

nséquemment la valeur totale de l'annuité sera

$$y-\frac{\delta}{a\rho}\left[(1+\rho)y-n(1+\rho)^{-n}\right]+A^d.$$

Mais puisque δ est toujours égal à $\frac{a-\alpha}{n}$ (1), et iisque A^d est égal à

$$A^0\times\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n},$$

ı peut rendre cette expression plus commode pour

(1) On peut généralement prendre cette formule pour la ıie valeur sans erreur sensible, même quand les décroisse-ns ne sont pas exactement réguliers.

la pratique en y faisant ces substitutions ; cette valeur deviendra donc

$$\frac{1}{\rho}-\frac{(a-\alpha).(1+\rho)y}{an\rho}-\frac{\alpha(1+\rho)^{-n}}{a\rho}+A^{\circ}\times\frac{\alpha}{a}(1+\rho)^{-n}$$
$$=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{a}\left[\frac{a-\alpha}{n\rho}(1+\rho)y-\alpha\left(\frac{1}{\rho}-A^{\circ}\right).(1+\rho)^{-n}\right].$$

Or l'on voit, d'après les tables d'observations de Northampton, que les décroissemens de la vie sont presque uniformes durant tout l'intervalle compris entre 20 et 80 ans ; si donc on a une fois calculé la valeur d'une annuité sur une tête âgée de 80 ans, la valeur d'une annuité sur une tête de tout âge intermédiaire peut être aisément déduite de la formule que nous venons de donner, et sera à très peu de chose près la véritable valeur demandée.

Exemple. Supposons que le taux de l'intérêt soit de 5 p. 100 ; dans ce cas la valeur d'une annuité sur une tête âgée de 80 ans sera 3,515 : et si nous voulons en déduire la valeur d'une annuité sur une tête de 20 ans, la formule deviendra

$$20-\frac{1}{5132}\left[\frac{5132-469}{60\times 0,05}\times 1,05\times 18,9293\right.$$
$$\left.-469\times(20-3,515)\times 0,0535\right]=14,061,$$

ce qui approche bien de 14,007 ou de la véritable valeur donnée par les tables. Et si l'on considère que la valeur ici trouvée ne pourrait être déduite du

orollaire de la page 22, sans qu'on calculât *soixante* ermes de la série donnée à cette page, on reconaîtra nécessairement l'utilité de cette formule.

Corollaire.

344. Si l'on demande la valeur d'une annuité *temporaire* pour un espace déterminé n, et que cet espace se trouve entièrement compris dans l'intervalle les décroissemens égaux indiqués par une table quelconque d'observations, la série

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a-\delta}{(1+\varrho)}+\frac{a-2\delta}{(1+\varrho)^2}+\frac{a-3\delta}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{a-n\delta}{(1+\varrho)^n}\right]$$
$$=y-\frac{a-\alpha}{an\varrho}[(1+\rho)y-n(1+\rho)^{-n}]$$

désignera, dans ce cas, la valeur *exacte;* et c'est une formule d'une très grande utilité quand on ne possède pas de tables d'annuités déduites d'observations réelles; si les décroissemens sont égaux à peu de chose près, la formule ne différera pas sensiblement de la véritable expression.

Exemple. Supposons qu'on veuille trouver la valeur d'une annuité temporaire de 20 ans sur une tête âgée de 20 ans, en supposant l'intérêt à 5 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton. Dans ce cas la formule deviendra

$$12,4622-\frac{5132-3635}{5132\times 20\times 0,05}\times(1,05\times 12,4622-20\times 0,3769)=10,844;$$

valeur *exacte* d'une annuité temporaire de 20 ans sur une tête âgée de 20 ans; car l'on verra à la table XXV que de l'âge de 20 ans à celui de 40, les décroissemens de la vie sont égaux. La valeur déduite de la règle du n° 47, est 10,847.

345. Ce problème et son corollaire serviront à montrer quel utile parti on peut souvent tirer de l'hypothèse de M. de Moivre, et de quelle manière on doit s'en servir toutes les fois que l'occasion s'en présente. Mais puisque les décroissemens de la vie sont surtout irréguliers dans les premiers et les derniers âges de l'existence, et ne sont uniformes ou à peu près tels qu'aux âges intermédiaires, on voit que cette hypothèse ne peut être employée sans danger que pour déduire la valeur des annuités ou des assurances *temporaires*. A cet égard elle est d'une utilité extrême, et épargnera souvent les calculs les plus laborieux. C'est de cette manière que M. Morgan a bien voulu s'en servir, encore l'a-t-il fait furtivement, et, je ne sais pour quelle raison, après avoir préalablement nié qu'il dût en faire aucun usage.

J'observerai ici que les règles dont on se sert pour déterminer la valeur des annuités qui dépendent de la vie entière d'un certain nombre de têtes tirées d'un autre nombre quelconque de têtes, ou des annuités en réversion ou dépendant d'une survivance, et en général pour résoudre les problèmes contenus dans les chapitres II, III et IV de cet ouvrage, sont absolument les mêmes avec l'hypothèse de M. de Moivre ou les observations réelles. Car dans chacun de ces

cas, la solution de ces questions se déduit de *tables* indiquant les valeurs des annuités sur une tête ou un groupe de plusieurs têtes, et par conséquent l'utilité ou l'inutilité de l'hypothèse de M. de Moivre quant à la valeur des *annuités*, dépendra toujours des propositions fondamentales que nous avons traitées plus haut.

Mais pour déduire la valeur des *assurances* ou des capitaux payables au décès, ses règles sont certainement beaucoup plus simples que celles déduites d'observations réelles; et il eût été heureux que cette hypothèse eût pu être admise pour *toute la durée* de la vie. Comme il n'en est pas ainsi, nous devons nous contenter des facilités qu'elle donne souvent pour déterminer, en beaucoup d'occasions, une valeur très approchée des assurances *temporaires*.

De la manière de trouver par approximation la valeur des annuités viagères.

346. Je ne puis clore ce chapitre sans faire observer l'utilité et la convenance des formules déduites de l'hypothèse de M. de Moivre, pour nous amener à trouver, d'après les valeurs des annuités sur une ou plusieurs têtes à un taux quelconque d'intérêt, les valeurs des annuités sur les mêmes têtes, à un *autre* taux d'intérêt. Pour développer cette méthode, j'observerai que, d'après l'hypothèse de M. de Moivre, la *vie moyenne* d'une tête quelconque est égale à la moitié de son *complément de vie*. Consé-

quemment le complément de vie d'une tête est égal à deux fois sa vie moyenne. Si donc nous substituons *deux fois la vie moyenne* d'une tête, déduite d'observations réelles, aux quantités *a*, *b* ou *c* dans les formules générales des nos **339**, **340** et **341**, les valeurs provenant de ces substitutions approcheront généralement beaucoup plus des valeurs exactes que celles obtenues en faisant *a*, *b* ou *c* égal au complément de vie de la tête proposée, d'après l'hypothèse de M. de Moivre. Ou bien (ce qui est tout ce qu'on demande en cette occasion) la différence entre les valeurs d'une annuité sur une ou plusieurs têtes, déduites de cette manière de la *vie moyenne* de ces têtes, à deux taux quelconques d'intérêt, sera presque la même que la différence entre les valeurs *exactes* d'une annuité semblable, aux mêmes taux d'intérêt, déduites *d'observations réelles*. Par conséquent, quand la valeur d'une annuité à un taux quelconque d'intérêt est donnée, on obtiendra facilement une valeur très approchée d'une semblable annuité à un autre taux, au moyen de la première différence dont nous parlons ; comme on le verra évidemment par la règle générale qui suit.

Appelons la valeur *exacte*, calculée d'après un taux quelconque d'intérêt, la PREMIÈRE valeur.

Appelons la valeur déduite des *vies moyennes* au même taux d'intérêt, la SECONDE valeur.

Appelons la valeur déduite des *vies moyennes* à un autre taux d'intérêt, la TROISIÈME valeur.

Alors la différence qui existe entre la SECONDE et la TROISIÈME valeurs, retranchée de ou ajoutée à la

PREMIÈRE valeur, selon que la SECONDE est plus grande ou moindre que la TROISIÈME, sera la valeur approchée de l'annuité à l'autre taux d'intérêt proposé.

Exemple. Quelle est la valeur approchée d'une annuité sur une tête âgée de 20 ans, à l'intérêt de 4 p. 100, en la déduisant de la valeur exacte à 5 p. 100 et d'après les observations de Northampton?

La PREMIÈRE valeur, ou la valeur exacte à 5 p. 100, est, par la table XXVII, égale à 14,007. La SECONDE valeur, déduite au même taux d'intérêt de la vie moyenne au moyen de la formule du n° 339, est égale à

$$\frac{66,86 - 1,05 \times 19,234}{66,86 \times 0,05} = 13,959 \text{ (1)}.$$

(1) Quand le double de la vie moyenne forme un nombre entier accompagné de décimales, comme il arrive le plus souvent, la valeur d'une annuité payable pendant ce temps peut être facilement obtenue de la manière suivante. Supposons que le nombre d'années soit, comme dans le cas actuel, 66,86. La valeur d'une annuité de 66 ans est, d'après la table LIX, 19,201, et la valeur d'une annuité de 67 ans, est 19,239. La différence entre ces deux valeurs est 0,038; si on multiplie cette différence par la partie décimale 0,86 et qu'on ajoute le produit 0,033 à la moindre des deux valeurs, on aura 19,234 pour la valeur de l'annuité de 66, 86 ans.

En comparant la seconde et la troisième valeurs ici obtenues, c'est-à-dire 13,959 et 15,984, aux valeurs de la table XXVII, on trouvera qu'elles approchent beaucoup plus

La TROISIÈME valeur, déduite de la même formule à 4 p. 100, est égale à

$$\frac{66,86 - 1,04 \times 23,183}{66,86 \times 0,04} = 15,984.$$

Donc

$$14,007 + (15,984 - 13,959) = 16,032$$

sera la valeur approchée que l'on demande, et elle ne diffère que d'une unité du dernier ordre de la valeur exacte donnée à la table XXVII.

347. Les mêmes principes sont applicables au cas d'un groupe de deux têtes, et l'on trouvera que dans les deux cas les valeurs déduites sont souvent sensiblement les mêmes que les valeurs exactes; que généralement la différence n'excède pas la vingtième ou la trentième partie de la rente d'une année; que cette différence est moindre dans le cas d'un groupe de plusieurs têtes que dans celui d'une seule tête; et qu'elle est la même, quel que soit le taux de l'intérêt (1).

---

des valeurs exactes que celles obtenues au moyen de l'hypothèse de M. de Moivre, et données à la table XLIX. On voit donc que la formule de M. de Moivre, donnée à la page 282 peut quelquefois être utilement employée pour trouver promptement et par une seule opération, une valeur approchée d'une annuité, déduite d'observations réelles.

(1) Price a démontré par un grand nombre d'exemples la vérité de ces assertions. Le même auteur remarque que ces

De la valeur des annuités viagères croissantes.

348. L'hypothèse de M. de Moivre nous fournit aussi une formule utile et commode pour déterminer la valeur des annuités viagères *croissantes*; c'est-à-dire des annuités de 1 fr., 2 fr., 3 fr., etc. (ou tous multiples de ces sommes), payables à la fin de 1, 2, 3, ... années respectivement, si la tête A existe à ces diverses époques; car la série exprimant cette valeur sera évidemment égale (d'après ce qui a été dit à la page 282) à

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a-1}{(1+\varrho)}+\frac{2(a-2)}{(1+\varrho)^2}+\frac{3(a-3)}{(1+\varrho)^3}+\ldots\frac{a(a-a)}{(1+\varrho)^a}\right];$$

expression qui pourra être divisée en deux autres

---

déductions sont si aisées, surtout dans le cas d'une seule tête, et approchent si près des vraies valeurs, qu'il regarde comme inutile de calculer à plus *d'un taux* d'intérêt les valeurs exactes d'après chaque table d'observations. Mais quelque utiles que soient les règles ci-dessus dans la pénurie actuelle de tables exactes, il n'en serait pas moins précieux de posséder de nouvelles tables à *divers* taux d'intérêt; et j'espère que les personnes qui pourraient entreprendre par la suite cette tâche laborieuse, ne se laisseront pas influencer par une excuse aussi faible et aussi blâmable. L'utilité réelle et l'objet des tables de tout genre est d'épargner du temps et du travail, et de prévenir les erreurs.

séries, savoir

$$\left[\frac{1}{(1+\rho)}+\frac{2}{(1+\rho)^2}+\frac{3}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{a}{(1+\rho)^a}\right]$$
$$-\frac{1}{a}\left[\frac{1^2}{(1+\rho)}+\frac{2^2}{(1+\rho)^3}+\frac{3^2}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{a^2}{(1+\rho)^a}\right]$$

Pour abréger les calculs, supposons

$$\left[\frac{1}{(1+\rho)}+\frac{1}{(1+\rho)^2}+\frac{1}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{1}{(1+\rho)^a}\right]=y,$$
$$\left[\frac{1}{(1+\rho)}+\frac{2}{(1+\rho)^2}+\frac{3}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{a}{(1+\rho)^a}\right]=x,$$
$$\left[\frac{1^2}{(1+\rho)}+\frac{2^2}{(1+\rho)^2}+\frac{3^2}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{a^2}{(1+\rho)^a}\right]=v.$$

Alors la somme des deux séries ci-dessus, ou la valeur de l'annuité demandée sera représentée par

$$x-\frac{v}{a}.$$

Mais d'après ce qui a été dit au n° **339**, on verra que la valeur d'une annuité sur une seule tête A est représentée par

$$y-\frac{x}{a};$$

et d'après ce qui a été dit au n° **340**, que la valeur d'une annuité sur un groupe de deux têtes égales AA est représentée par

$$y-\frac{2x}{a}+\frac{v}{aa}.$$

Donc

$$A - AA = y - \frac{x}{a} - y + \frac{2x}{a} - \frac{v}{aa} = \frac{x}{a} - \frac{v}{aa};$$

par conséquent

$$a(A - AA) = x - \frac{v}{a}$$

sera la valeur de l'annuité croissante demandée, d'où nous déduisons la règle suivante.

349. De la valeur d'une annuité sur la tête donnée, retranchez la valeur d'une annuité sur un groupe de deux têtes égales et du même âge que la tête donnée, multipliez le reste par le *complément de vie*, ou deux fois la *vie moyenne* de la tête donnée, et le produit sera la valeur demandée.

Exemple. Supposons que la tête proposée soit âgée de 40 ans et que l'annuité soit de 1 fr. la première année, 2 fr. la seconde, 3 fr. la troisième, et ainsi de suite dans l'ordre des nombres naturels. Quelle est la valeur actuelle de cette annuité, en supposant l'intérêt à 4 p. 100 et la mortalité conforme aux tables de Northampton?

Ici nous aurons $A = 13{,}197$, $AA = 9{,}820$ et a, ou deux fois la vie moyenne, $= 46{,}16$; par conséquent

$$46{,}16 \times (13{,}197 - 9{,}820) = 155{,}882$$

sera la valeur demandée.

Si l'annuité était de 10 fr., 20 fr., 30 fr., etc. la valeur actuelle serait 155,882 × 10. Ou si elle était de 15 fr., 30 fr., 45 fr., etc., sa valeur actuelle serait 155,882 × 15.

Mais quand l'annuité *commence* par une somme supérieure à 1 fr. et s'accroît seulement de 1 fr. par année, nous devons ajouter à la valeur trouvée plus haut la valeur d'une annuité sur la tête donnée, multipliée par le premier paiement diminué d'une unité; et la somme est la valeur demandée. Ainsi si l'annuité, dans le premier cas cité plus haut était de 15 fr., 16 fr., 17 fr., etc., nous devrions multiplier 13,197 par 14, et le produit, ou 184,758 ajouté à 155,882 donnerait 340,640 pour la valeur demandée.

354. Ces exemples et beaucoup d'autres peuvent servir à montrer d'un coup d'œil la grande utilité de l'hypothèse de M. de Moivre. Les cas d'application les plus fréquens nous convaincront de son importance pratique; mais son mérite principal consiste en ce qu'elle conduit nos recherches dans beaucoup de branches de cette théorie, où l'analyse ordinaire n'eût pu être qu'extrêmement embarrassée et souvent même eût complétement échoué; elle est donc bien loin de mériter les fausses et méprisantes épithètes de *misérable* et *d'absurde*.

CHAPITRE X.

DE LA VALEUR DES ANNUITÉS PAYABLES PAR SEMESTRE, ETC. DES ASSURANCES PAR SEMESTRE, ETC. ET DES ANNUITÉS HYPOTHÉQUÉES SUR IMMEUBLES.

352. Dans les chapitres précédens, les valeurs des annuités ont été calculées dans la supposition qu'elles sont toutes payables annuellement, comme il arrive en effet le plus fréquemment. Mais comme d'autres conventions pourraient se présenter, il sera utile de connaître les limites des différences provenant de ces circonstances. C'est donc pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet que j'entreprends les raisonnemens qui vont suivre, et que je ne ferai précéder d'aucun autre préliminaire (1).

---

(1) Celui qui touche une rente viagère *par semestre* a un double avantage sur celui qui reçoit une même rente annuellement; car, outre l'intérêt de chaque paiement pendant six mois, il a la chance de recevoir un paiement semestriel *de plus* que celui qui touche annuellement. De la même manière, celui qui touche par *trimestre* a un double avantage sur celui qui touche par semestre, etc., etc.

Si a, a', a'', a''', etc. représentent les nombres de personnes vivantes à l'âge de A et aux âges plus avancés que A de 1, 2, 3, etc. années, d'après ce qui a été dit au n° 23; alors

$$\frac{a+a'}{2}, \frac{a'+a''}{2}, \frac{a''+a'''}{2} \text{ etc.}$$

désigneront les nombres de personnes vivantes aux âges plus avancés que A de $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, etc. années; ces nombres, quoique n'étant pas strictement exacts dans tous les cas, rempliront le but que nous nous proposons, et seront aussi près de la valeur réelle que nous pouvons le désirer. Par conséquent, la valeur actuelle d'une annuité sur la tête A payable *par semestre* est égale à

$$\frac{1}{2a}\left[\frac{a+a'}{2(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a'}{(1+\varrho)}+\frac{a'+a''}{2(1+\varrho)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{a''+a'''}{2(1+\varrho)^{\frac{5}{2}}}+\frac{a'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right],$$

série qui peut évidemment se partager en deux autres, savoir

$$\frac{1}{2a}\left[\frac{a+a'}{2(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a'-a''}{2(1+\varrho)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a''-a'''}{2(1+\varrho)^{\frac{5}{2}}}+\text{etc.}\right]$$
$$+\frac{1}{2a}\left[\frac{a'}{(1+\varrho)}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right].$$

La dernière de ces séries est égale à $\frac{A}{2}$; et la première

i peut encore se diviser en deux autres séries

$$\frac{1}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}\left[a+\frac{a'}{(1+\varrho)}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]$$

$$\frac{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}{4a}\left[\frac{a'}{(1+\varrho)}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]$$

égale à

$$\frac{1+A}{4(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}A}{4}.$$

nc la valeur totale actuelle de l'annuité est égale à

$$+\frac{1+A}{4(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}A}{4}=\frac{2(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}A+1+A+(1+\varrho)A}{4(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}+2+\varrho}{4(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}\times A+\frac{1}{4(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais puisque la quantité

$$\frac{2(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}+2+\varrho}{4(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}$$

passe rarement l'unité d'une quantité considé-le (1), cette expression peut être prise, sans erreur

---

(1) Quand le taux de l'intérêt est de 2 p. 100 par an, la ntité dont il s'agit est égale à 1,000025, et quand le taux de 10 p. 100, elle est égale à 1,000569; on peut de là se ner une idée de sa valeur à tout taux intermédiaire.

sensible, comme égale à

$$A + \frac{1}{4(1+\rho)^{\frac{1}{2}}};$$

et puisque

$$\frac{1}{4(1+\rho)^{\frac{1}{2}}}$$

est rarement inférieur à $\frac{1}{4}$ (1) d'une quantité considérable, l'expression peut encore se réduire à $A + \frac{1}{4}$. C'est-à-dire que, si à la valeur de l'annuité payable annuellement on ajoute le *quart de la rente d'une année*, la somme sera, à très peu de chose près, la valeur de la même annuité payable *par semestre*. Cependant on pourrait aisément déterminer les valeurs *exactes* au moyen de l'expression générale ci-dessus.

353. Si nous voulons déterminer la valeur actuelle d'une semblable annuité payable *par trimestre*, nous prendrons

$$\frac{3a+a'}{4},\ \frac{a+3a'}{4},\ \frac{3a'+a''}{4},$$
$$\frac{a'+3a''}{4},\ \frac{3a''+a'''}{4},\ \frac{a''+3a'''}{4},\ \text{etc.}$$

---

(1) Quand le taux de l'intérêt est de 2 p. 100 par an, cette quantité est égale à 0,2475, et quand l'intérêt est de 10 p. 100, elle est égale à 0,2384; mais on voit que quand cette quantité *diminue*, celle mentionnée dans la note précédente *augmente*; par conséquent $A + \frac{1}{4}$ est, à fort peu de chose près, la véritable valeur.

pour représenter les nombres de personnes vivantes à la fin de $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, etc. années. D'où la valeur actuelle d'une annuité sur la tête A payable par trimestre sera trouvée égale à

$$\frac{1}{4a}\left[\frac{3a+a'}{4(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}+\frac{a+a'}{2(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a+3a'}{4(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}+\frac{a'}{(1+\varrho)}\right.$$
$$\left.+\frac{3a'+a''}{4(1+\varrho)^{\frac{5}{4}}}+\frac{a'+a''}{2(1+\varrho)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a'+3a''}{4(1+\varrho)^{\frac{7}{4}}}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}+\text{etc.}\right]$$

Mais cette série peut se diviser en quatre autres, savoir :

$$\frac{1}{16\,a(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{3a+a'}{1}+\frac{3a'+a''}{(1+\varrho)}+\frac{3a''+a'''}{(1+\varrho)^2}+\text{etc.}\right]$$
$$=\frac{3(1+A)}{16(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}+\frac{A(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}{16};$$

$$\frac{1}{8\,a(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{a+a'}{1}+\frac{a'+a''}{(1+\varrho)}+\frac{a''+a'''}{(1+\varrho)^2}+\text{etc.}\right]$$
$$=\frac{1+A}{8(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{A(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}{8};$$

$$\frac{1}{16\,a(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{a+3a'}{1}+\frac{a'+3a''}{(1+\varrho)}+\frac{a''+3a'''}{(1+\varrho)^2}+\text{etc.}\right]$$
$$=\frac{1+A}{16(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}+\frac{3A(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}{16};$$

et $\frac{1}{4a}\left[\frac{a'}{(1+\varrho)}+\frac{a''}{(1+\varrho)^2}+\frac{a'''}{(1+\varrho)^3}+\text{etc.}\right]$
$$=\frac{A}{4}.$$

Donc la valeur totale actuelle de l'annuité est égale à

$$\frac{3(1+A)}{16(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}+\frac{A(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}{16}+\frac{1+A}{8(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{A(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}{8}+\frac{1+A}{16(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}+\frac{3A(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}{16}+\frac{A}{4}$$

$$=\frac{4(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}+(4+\varrho)\cdot(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}+2(2+\varrho)\cdot(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}+4+3\varrho}{16(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}$$

$$\times A+\frac{3(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}+2(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}+1}{16(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}.$$

Mais, puisque l'expression fractionnaire par laquelle A est multiplié excède rarement l'unité d'une quantité considérable (1), cette formule peut être prise, sans erreur sensible, comme égale à

$$A+\frac{3(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}+2(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}+1}{16(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}};$$

et puisque cette dernière expression est rarement inférieure à $\frac{3}{8}$ (2) d'une quantité considérable, cette

---

(1) Quand l'intérêt est de 2 p. 100, cette quantité est égale à 1,000037, et quand l'intérêt est de 10 p. 100, elle est égale à 1,000710; on peut par là se former une idée de sa valeur à tout taux intermédiaire.

(2) Quand l'intérêt est de 2 p. 100, cette quantité est égale à 0,3719, et quand l'intérêt est de 10 p. 100, elle est égale à

xpression peut encore se réduire à $A+\frac{3}{8}$; c'est-à-lire, que si à la valeur de l'annuité payable anuellement, on ajoute *les trois huitièmes de la rente l'une année*, la somme sera à très peu de chose rès la valeur de la même annuité payable *par rimestre*. Les valeurs exactes, toutefois, pourraient tre aisément déterminées, comme dans le preaier cas, au moyen de l'expression générale donée ci-dessus.

354. Dans l'hypothèse de M. de Moivre la valeur ctuelle d'une annuité viagère payable *par semestre* era représentée par la série

$$\frac{1}{2a}\left[\frac{a-\frac{1}{2}}{(1+\rho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a-1}{(1+\rho)}+\frac{a-\frac{3}{2}}{(1+\rho)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a-2}{(1+\rho)^2}+\frac{a-\frac{5}{2}}{(1+\rho)^{\frac{5}{2}}}+\frac{a-3}{(1+\rho)^3}+\ldots\frac{a-a}{(1+\rho)^a}\right]:$$

iquelle peut se diviser en deux autres, savoir

$$\left[\frac{1}{(1+\rho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(1+\rho)}+\frac{1}{(1+\rho)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(1+\rho)^2}+\ldots\frac{a}{(1+\rho)^a}\right]$$
$$-\frac{1}{4a}\left[\frac{1}{(1+\rho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{(1+\rho)}+\frac{3}{(1+\rho)^{\frac{3}{2}}}+\frac{4}{(1+\rho)^2}+\ldots\frac{2a}{(1+\rho)^a}\right].$$

3605; on voit d'ailleurs que cette valeur diminue quand :lle de la note précédente augmente; par conséquent $A+\frac{3}{8}$ it, à fort peu de chose près, la valeur exacte.

La première de ces séries est égale à

$$\frac{1}{2} \times \frac{1-(1+\varrho)^{-a}}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}-1} = h\ (1),$$

et la seconde est égale à

$$-\frac{1}{4a} \times \frac{2h(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}-2a(1+\varrho)^{-a}}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}-1},$$

par conséquent la valeur totale actuelle de l'annuité est égale à

$$\frac{1}{2a} \times \frac{a-h(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}-1}.$$

De la même manière, la valeur actuelle d'une annuité viagère payable *par trimestre* sera, d'après la même hypothèse, égale à

$$\frac{1}{4a}\left[\frac{a-\frac{1}{4}}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}+\frac{a-\frac{1}{2}}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a-\frac{3}{4}}{(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}+\frac{a-1}{(1+\varrho)}+\ldots\frac{a-a}{(1+\varrho)^{a}}\right];$$

expression qui peut se diviser en deux autres séries, savoir

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{(1+\varrho)}+\ldots\frac{1}{(1+\varrho)^{a}}\right]$$

---

(1) Voir ma *Théorie de l'Intérêt et des Annuités*, p. 56.

$$-\frac{1}{16a}\left[\frac{1}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}+\frac{4}{(1+\varrho)}+\dots\frac{4a}{(1+\varrho)^{a}}\right].$$

Mais la première de ces deux séries est égale à

$$\frac{1}{4}\times\frac{1-(1+\varrho)^{-a}}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}-1}=q\ (1),$$

t la seconde est égale à

$$-\frac{1}{16a}\times\frac{4q(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}-4\,a(1+\varrho)^{-a}}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}-1}:$$

onséquemment la valeur totale actuelle de l'annuité st dans ce cas égale à

$$\frac{1}{4a}\times\frac{a-q(1+\varrho)}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}-1}.$$

En raisonnant de la même manière nous pour-ons trouver la valeur actuelle des annuités payables tous autres intervalles; mais il suffira de montrer dernière limite de l'augmentation produite par la ıpposition que l'annuité soit payable à des in-rvalles de plus en plus rapprochés; cette limite ra trouvée si l'on considère l'annuité comme ant payée *instantanément ;* dans ce cas l'expres-

(1) Voir ma *Théorie de l'Intérêt et des Annuités*, p. 56.

sion devient

$$\frac{a - m}{a \times NL.(1 + \varrho)}(1): m \text{ étant égal à } \frac{1 - (1 + \varrho)^{-a}}{NL(1 + \varrho)},$$

ou à la valeur actuelle d'une annuité *certaine* pendant l'espace a payable *instantanément*.

355. Si l'on compare les valeurs numériques de ces expressions pour les annuités payables par semestre ou par trimestre, d'après l'hypothèse de M. de Moivre, à celles déduites d'observations réelles, on verra qu'elles se confirment mutuellement et qu'elles justifient la règle que j'ai donnée plus haut; je veux dire que la valeur des annuités payables *annuellement* doit être augmentée d'environ le $\frac{1}{4}$ de la rente d'une année pour indiquer la valeur des mêmes annuités payables *par semestre;* qu'elle doit être augmentée d'environ $\frac{3}{8}$ de la rente d'une année pour représenter la valeur des mêmes annuités payables par *trimestre*, et enfin qu'elle doit être augmentée de la moitié de la rente d'une année pour représenter la valeur des mêmes annuités payable *instantanément*.

356. Le lecteur doit observer, que dans tous ces cas je n'ai eu égard qu'un taux véritable de l'intérêt *annuel*, d'après les principes que j'ai exposés

---

(1) J'observerai ici que j'appelle NL le logarithme *népérien* de la quantité qui suit immédiatement ce caractère.

dans un autre ouvrage pour déterminer la valeur des annuités en général. Mais ce taux annuel peut toujours être exprimé en fonction du taux *nominal*, en faisant les substitutions dont traite cet ouvrage (1), selon que l'intérêt est payable par semestre, ou par trimestre, etc. : nous trouverons par là que, dans l'hypothèse de M. de Moivre, les valeurs actuelles d'une annuité, sur la tête dont le complément de vie est a, payable *annuellement*, *par semestre*, *par trimestre*, et *instantanément*, et dans la supposition que *l'intérêt* est aussi payable aux *mêmes* intervalles, seront représentées respectivement par

$$\frac{a-(1+r)y}{ar}, \quad \frac{a-\left(1+\frac{r}{2}\right)h}{ar}, \quad \frac{a-\left(1+\frac{r}{4}\right)q}{ar} \quad \text{et} \quad \frac{a-m}{ar}:$$

dans ces formules y, h, q, et m représenteront *maintenant* respectivement les valeurs actuelles d'annuités certaines pendant l'espace a, payables *annuellement*, *par semestre*, *par trimestre* et *instantanément*, et dans la supposition que *l'intérêt* aussi est payable aux *mêmes* intervalles.

Si l'on compare les unes avec les autres les valeurs numériques de ces expressions, on trouvera que les annuités semestrielles vaudront d'après ce principe environ les $\frac{2}{10}$ de la rente d'une année, et les

(1) C'est-à-dire en remplaçant ρ par $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1$; d'après ce qui a été dit dans ma *Théorie de l'Intérêt et des Annuités*, p. 54.

annuités trimestrielles environ les $\frac{3}{10}$ de la rente d'une année *de plus* que la valeur des mêmes annuités payables annuellément ; et c'est la règle donnée par Price (1). Mais comme les époques des paiements de l'annuité sont totalement indépendantes des époques du paiement de l'intérêt, et ne doivent pas être confondues avec elles (comme je l'ai expliqué longuement dans le dixième chapitre de ma *Théorie de l'Intérêt et des Annuités*), nous trouverons que d'ajouter aux valeurs des tables $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{8}$ respectivement, comme on le voit aux n°s 352 et 353 serait la règle la plus correcte pour l'usage général ; c'est ce qui a déjà été avancé par M. Simpson dans sa *Théorie des Annuités en Reversion*, page 79.

Comme les deux manières d'opérer sont maintenant sous les yeux du public, le calculateur peut adopter la règle qui lui convient le mieux selon les cir-

---

(1) *Voyez* ses *Observations on Rev. Pay.*, t. Ier, p. 246. Les deux exemples suivans, donnés par lui, montreront la différence réelle qui existe dans ces cas.

Valeur d'une annuité sur une tête, intérêt 4 *p.* 100.

AGES.	Payable annuellement.	Payable par semestre.	Payable par trimestre.	Payable instantaném.
36	13,829	14,010	14,101	14,191
61	8,753	8,973	9,072	9,199

constances. Price s'est efforcé de combattre la règle de M. Simpson sans établir sur quoi il fonde son opposition, et de lui substituer la sienne, sans expliquer la nature et la cause de leur différence.

357. Jusqu'ici je n'ai considéré de différences que dans la valeur des annuités *sur une seule tête*; mais il sera évident que dans la supposition où l'on fait valoir l'argent à un taux *annuel* d'intérêt désigné, les différences seront presque les mêmes pour un *groupe* de deux têtes, lorsqu'on déduit la valeur de l'annuité d'observations réelles, et que les probabilités de vivre à la fin de chaque semestre sont respectivement représentées par

$$\frac{ab + a'b'}{2ab},\ \frac{a'b' + a''b''}{2ab},\ \frac{a''b'' + a'''b'''}{2ab},\ \text{etc.}:$$

probabilités qui, quoique n'étant pas tout-à-fait correctes, rempliront le but que nous nous proposons.

Cependant dans l'hypothèse de M. de Moivre, et dans la supposition que l'on fait valoir l'argent à un intérêt payable aux mêmes époques que l'annuité, la valeur d'une annuité sur un groupe de deux têtes dont les complémens de vie sont *a* et *b*, payable *par semestre*, est exactement exprimée par la série suivante

$$\frac{1}{2ab}\left[\frac{(a-\frac{1}{2}).(b-\frac{1}{2})}{\left(1+\frac{r}{2}\right)} + \frac{(a-1).(b-1)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{(a-\frac{3}{2}).(b-\frac{3}{2})}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^3} + \frac{(a-2).(b-2)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^4} + \ldots \frac{(a-b).(b-b)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2b}}\right]:$$

dont la somme, d'après ce qui précède, sera aisément trouvée égale à

$$\frac{1}{r}-\frac{2+r}{2ar}\left[\frac{h}{b}\times\left(a-b-\frac{1}{2}-\frac{2}{r}\right)+\frac{2}{r}\right].$$

De la même manière la valeur d'une annuité sur ces têtes, payable *par trimestre*, est d'après les mêmes principes égale à

$$\frac{1}{4ab}\left[\frac{(a-\frac{1}{4}).(b-\frac{1}{4})}{\left(1+\frac{r}{4}\right)}+\frac{(a-\frac{1}{2}).(b-\frac{1}{2})}{\left(1+\frac{r}{4}\right)^2}+\frac{(a-\frac{3}{4}).(b-\frac{3}{4})}{\left(1+\frac{r}{4}\right)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{(a-1).(b-1)}{\left(1+\frac{r}{4}\right)^4}+\ldots\ldots\frac{(a-b).(b-b)}{\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4b}}\right],$$

dont la somme est égale à

$$\frac{1}{r}-\frac{4+r}{4ar}\left[\frac{q}{b}\left(a-b-\frac{1}{4}-\frac{2}{r}\right)+\frac{2}{r}\right].$$

Et, si l'on suppose que l'annuité et l'intérêt soient tous deux payables *instantanément*, sa valeur deviendra égale à

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{ar}\left[\frac{m}{b}\left(a-b-\frac{2}{r}\right)+\frac{2}{r}\right].$$

Dans ces diverses formules, les quantités h, q, et m désignent les valeurs actuelles d'annuités *certaines* pendant l'espace b, payables *par semestre*, *par trimestre* et *instantanément*, dans la supposition que l'intérêt aussi est payable aux mêmes intervalles.

Des Assurances payables par semestre, etc.

358. En raisonnant d'une manière semblable à
lle qui nous avons suivie dans la première partie
ce chapitre, nous pourrons déterminer la valeur
tuelle des Assurances pour chaque semestre ou
mestre de la vie humaine. Car, si l'on représente
r les mêmes quantités qu'au n° **352** les nombres de
rsonnes vivantes à la fin de $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ... an-
es depuis l'âge de **A**, alors les probabilités que
tte tête a de s'éteindre dans le courant des pre-
ier, second, troisième, etc., semestres seront re-
ésentées respectivement par

$$\frac{a-a'}{2a}, \frac{a-a'}{2a}, \frac{a'-a''}{2a}, \frac{a'-a''}{2a}, \frac{a''-a'''}{2a}, \text{etc. :}$$

nséquemment la valeur actuelle d'une assurance
la somme s sur la tête **A** pour chaque *semestre*
la vie humaine sera véritablement exprimée par

$$\frac{s}{2a}\left[\frac{a-a'}{(1+\rho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a-a'}{(1+\rho)}+\frac{a'-a''}{(1+\rho)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a'-a''}{(1+\rho)^{2}}\right.$$
$$\left.+\frac{a''-a'''}{(1+\rho)^{\frac{5}{2}}}+\text{etc.}\right]=\frac{s}{2}\left(1+(1+\rho)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\times\frac{1-\rho A}{(1+\rho)}.$$

359. De la même manière, si l'on représente
r les mêmes quantités qu'au n° **353** les nombres de

personnes vivantes à la fin de $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$ .... années à partir de l'âge de A, alors les probabilités que cette tête a de s'éteindre dans le courant des premier, second, troisième, etc., trimestres seront représentées respectivement par

$$\frac{a-a'}{4a}, \frac{a-a'}{4a}, \frac{a-a'}{4a}, \frac{a-a'}{4a}, \frac{a'-a''}{4a}, \frac{a'-a''}{4a}, \text{etc.}:$$

conséquemment la valeur actuelle d'une assurance de la somme s sur la tête A pour chaque *trimestre* de la vie humaine sera véritablement exprimée par

$$\frac{s}{4a}\left[\frac{a-a'}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}}+\frac{a-a'}{(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a-a'}{(1+\varrho)^{\frac{3}{4}}}+\frac{a-a'}{(1+\varrho)}+\frac{a'-a''}{(1+\varrho)^{\frac{5}{4}}}\right.$$
$$\left.+\text{etc.}\right]=\frac{s}{4}\left[1+(1+\rho)^{\frac{1}{4}}+(1+\rho)^{\frac{1}{2}}+(1+\rho^{\frac{8}{4}}\right]$$
$$\times\frac{1-\varrho\mathcal{A}}{(1+\varrho)}=\frac{s}{4}\times\frac{\varrho}{(1+\varrho)^{\frac{1}{4}}-1}\times\frac{1-\varrho\mathcal{A}}{(1+\varrho)}.$$

360. En continuant ces subdivisions, nous trouverons que la valeur actuelle de la même assurance sur la tête A pour chaque $n^{ième}$ partie d'une année, sera véritablement exprimée par

$$\frac{s}{n}\left[1+(1+\rho)^{\frac{1}{n}}+(1+\rho)^{\frac{2}{n}}+\ldots\ldots(1+\rho)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$
$$\times\frac{1-\varrho\mathcal{A}}{(1+\varrho)}=\frac{s}{n}\times\frac{\varrho}{(1+\varrho)^{\frac{1}{n}}-1}\times\frac{1-\varrho\mathcal{A}}{(1+\varrho)}.$$

Maintenant quand n est infini, cette formule de-

/ient égale à

$$\frac{s.\varrho}{NL.(1+\varrho)} \times \frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)} \ (1)$$

e qui désigne conséquemment la valeur d'une as-
ırance pour chaque *instant* de la vie humaine :
'est-à-dire, la valeur de la somme proposée paya-
le *immédiatement* à l'extinction de la tête don-
ée (2).

Il peut être nécessaire de remarquer ici que ces
ıleurs sont toutes déduites du véritable taux *an-
uel* d'intérêt, qui peut être réduit au taux *no-
inal* en faisant la substitution dont nous avons
ırlé à la note de la page 309.

---

(1) Parce que, dans ce cas, $n\left[(1+\varrho)^{\frac{1}{n}}-1\right]$ est égal au lo-
ırithme népérien de $(1+\varrho)$.

(2) Comme le logarithme népérien de $(1+\varrho)$ diffère très
ɪu de $\frac{2\varrho}{2+\varrho}$, on peut rendre cette dernière formule plus con-
ɪnable pour la pratique en la faisant égale à

$$\frac{s\varrho(2+\varrho)}{2\varrho} \times \frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)} = s\left(1+\frac{\varrho}{2}\right) \times \frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)};$$

ıpression qui excède la valeur de l'assurance annuelle trou-
ée au moyen de la règle de la page 122, de la quantité

$$\frac{s\varrho}{2} \times \frac{1-\varrho A}{(1+\varrho)}.$$

Des annuités viagères garanties par des immeubles.

361. Une annuité viagère *garantie par des immeubles* diffère des annuités dont nous avons parlé dans le courant de cet ouvrage, en ce que si le titulaire meurt à une époque quelconque entre les échéances désignées pour le paiement de l'annuité, ses héritiers doivent recevoir une somme proportionnée au temps qui s'est écoulé entre le dernier paiement et sa mort; tandis que dans tous les cas que nous avons considérés jusqu'ici, si le titulaire meurt le jour qui précède celui du paiement, ou à toute autre distance de cette échéance, ses héritiers ne peuvent prétendre à aucune portion de l'annuité.

Dans ce cas, en supposant que l'annuité soit payable annuellement, le titulaire (puisqu'il y a chance égale pour qu'il meure dans le premier ou dans le second semestre de chaque année) peut être considéré comme ayant l'espérance de la moitié de la rente d'une année, en outre de ce qu'il aurait eu à prétendre de l'autre manière. Mais la valeur de la moitié de 1 fr. payable à l'extinction d'une tête quelconque A, est d'après le problème XXII égale à

$$\frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)},$$

et c'est la quantité qu'on doit ajouter à la valeur d'une annuité payable annuellement, pour en ob-

tenir la valeur quand elle est garantie par des immeubles : conséquemment la valeur de cette annuité est

$$A + \frac{1-\varrho A}{2(1+\varrho)} = \frac{1+2(1+\varrho)A}{2(1+\varrho)}.$$

362. De la même manière, en supposant que l'annuité soit payable par semestre, le titulaire peut être considéré comme ayant l'espérance du quart de la rente d'une année, en outre de ce qu'il aurait eu à prétendre de l'autre manière. Mais la valeur du quart de 1 fr. payable à l'extinction de la tête A dans un semestre quelconque est, d'après la formule du nº 358, égale à

$$\frac{\left[1+(1+\varrho)^{\frac{1}{2}}\right] \times (1-\varrho A)}{8(1+\varrho)};$$

expression qu'on doit ajouter à la valeur d'une annuité payable par semestre, pour obtenir sa valeur quand elle est garantie par des immeubles ; et ainsi de suite pour les additions à faire à la valeur d'une annuité payable par trimestre, etc. Mais la *différence* entre la valeur d'une annuité payable annuellement, *non* garantie par des immeubles, et la valeur d'une annuité payable aux mêmes ou à d'autres intervalles, quand elle est garantie par des immeubles, ne peut jamais excéder 0,5 ou la moitié de l'unité.

363. M. de Moivre, dans sa *Théorie des chances*, page 338, a donné, pour trouver la valeur d'une

annuité garantie par des immeubles et payable annuellement, un théorème qu'il a démontré par un calcul différentiel; sa méthode est facilement applicable à son hypothèse : et M. Dodson, à la page 4 du 3e volume de son *Mathematical Repository*, a donné un autre théorème pour ce dessein sans faire usage du même calcul, et a été conduit à un résultat presque semblable. Mais M. Simpson, dans ses *Select Exercises*, page 323, et dans le *Supplément* de sa *Théorie des Annuités*, page 70, a donné un théorème qui montre la valeur, non d'une annuité payable annuellement, et garantie par des immeubles, mais d'une annuité payable *instantanément* à un taux *annuel* d'intérêt désigné. Ces valeurs, dans tous les cas, sont obtenues d'après l'hypothèse de M. de Moivre.

J'observerai ici que les formules que j'ai données plus haut sont les premières qui aient été déduites d'observations réelles, et sont beaucoup plus simples que celles déduites de l'hypothèse de M. de Moivre; mais quoiqu'elles découlent facilement des raisonnemens qui les ont précédées, et que d'autres écrivains eussent pu les appliquer aisément à la valeur des annuités déduites de ces observations, cependant ceux qui ont été le plus ardens à attaquer l'ensemble des principes de M. de Moivre, non-seulement ont conservé sans les corriger ni les blâmer ses formules sur cette question *et sur beaucoup d'autres*, mais les ont insérées dans leurs ouvrages comme donnant une solution naturelle et correcte de ces différens problèmes.

CHAPITRE XI.

DE LA VALEUR, EN PRIMES ANNUELLES, DES ANNUITÉS DIFFÉRÉES, DES ANNUITÉS EN REVERSION ET DES ASSURANCES.

364. Dans tous les cas d'annuités différées mentionnés au problème I, corollaire 3, et dans les corollaires des problèmes suivans, aussi bien que dans toutes les questions d'assurances, j'en ai déduit les valeurs en un paiement *unique;* mais on a souvent besoin de déterminer ces valeurs en primes *annuelles*. Je vais exposer maintenant la manière dont se fait cette conversion.

Dans le cas des annuités *différées* reposant sur un groupe quelconque de têtes ABC, la valeur en un seul paiement est, d'après le problème I, corollaire 3, désignée par $(ABC)^d$. Mais si celui qui achète cette annuité désire en acquitter le prix en paiemens *annuels* égaux, payables pendant le temps dont est différée l'annuité (1), ces paiemens égaux

(1) Cette prime annuelle cessant toutefois d'être payable si les têtes proposées s'éteignent avant l'expiration de ce délai.

doivent être tels que leur valeur totale actuelle soit égale au paiement unique cité plus haut, ou, en d'autres termes, il paiera au lieu de cette somme une annuité équivalente pendant l'espace désigné.

365. Représentons par p la prime annuelle demandée, et la valeur d'une annuité temporaire sur les têtes données, c'est-à-dire d'une annuité qui doit durer jusqu'à l'époque où l'annuité différée commence, par $(ABC)^t$: alors, puisque la valeur de l'annuité différée, ou $(ABC)^d$, doit être payée par paiemens annuels égaux pendant l'espace dont est différée la jouissance de cette annuité (ces paiemens devant cesser d'ailleurs si l'une des têtes données s'éteignait dans cette période) il est évident que la somme ou la valeur de ces paiemens sera égale à la valeur d'une annuité temporaire sur les têtes données et pendant l'espace désigné, et dont la quotité annuelle serait p; c'est-à-dire,

$$p\,(ABC)^t = (ABC)^d.$$

Cette équation n'a lieu cependant que dans la supposition où le premier paiement annuel n'est effectué qu'*à la fin* de la première année, et continue de l'être *à la fin* de chacune des années suivantes, jusqu'à l'expiration du délai. Mais cette supposition n'est jamais ou presque jamais exacte; et la manière la plus commune, sinon la manière invariable dont se paie cette prime, est que le premier paiement en soit effectué *immédiatement* et les autres *au com-*

mencement de chacune des années suivantes; de sorte que le nombre de primes soit égal au nombre d'années dont est différée l'annuité. Donc, puisque le paiement qui, dans le cas précédent, est effectué *à la fin du délai*, l'est maintenant *au commencement*, nous devons ajouter l'unité à la valeur d'une annuité payable pendant *un an de moins* que le délai fixé; et cette quantité multipliée par le montant de la prime annuelle sera égale à la valeur de l'annuité différée. Conséquemment la formule deviendra, dans ce cas,

$$p[1+(ABC)^{t-1}]=(ABC)^d;$$

donc

$$p=\frac{(ABC^d)}{1+(ABC)^{t-1}}:$$

d'où la règle suivante :

366. Divisez la valeur de l'annuité *différée* par l'unité ajoutée à la valeur d'une annuité *temporaire* sur les mêmes têtes pour un an de moins que le *délai* fixé, le quotient sera la prime annuelle demandée.

Voyez, pour l'application de cette règle, le scolie de la question VI dans le chapitre XII.

367. La même règle s'appliquera au cas des annuités différées, payables jusqu'au *dernier décès* de deux ou plusieurs têtes (*voyez* problème II, corollaire 2). Car si l'on représente par L la valeur d'une annuité payable jusqu'au dernier décès d'un nombre quelconque de têtes, alors la valeur d'une semblable annuité

différée sera représentée par L^d, et la valeur d'une semblable annuité *temporaire* pendant *un an de moins* que le *délai* fixé sera représentée par L^{t-1}. Donc, d'après ce qui a été dit plus haut, nous aurons

$$p = \frac{L^d}{1 + L^{t-1}}.$$

Voyez, pour l'application de cette formule, la question XI du chapitre XII.

Dans ce cas toutefois on devra particulièrement observer que si l'annuité différée dépend de l'existence *simultanée* des têtes proposées à la fin du délai fixé, comme on l'a vu au problème II, corollaire 3, la formule deviendra

$$p = \frac{L^d}{1 + (ABC)^{t-1}}.$$

Voyez, pour l'application de cette formule, le scolie de la question XI dans le chapitre XII.

368. Un raisonnement semblable nous conduira à trouver la vraie valeur en primes annuelles, payables jusqu'à l'extinction des têtes données, de toute annuité en *reversion*. Ainsi soit R la valeur d'une annuité en reversion comme celles du premier cas de la page 57 ; alors sa valeur en primes annuelles, payables pendant l'existence simultanée des deux têtes, sera

$$p = \frac{R}{1 + AP}.$$

La même formule s'applique aussi au cas des annuités en reversion *différées*.

Voyez, pour l'application de cette formule, le scolie de la question XIII dans le chapitre XII, et aussi la question XVIII et le scolie de la question XVIII du même chapitre.

Mais si l'annuité en reversion n'est que *temporaire*, cette annuité étant représentée par R', nous aurons

$$p = \frac{R'}{1 + (AP)^{t-1}}.$$

Voyez, pour l'application de cette formule, la question XIX du chapitre XII.

369. Les principes qui viennent d'être exposés s'appliqueront aussi à tous les cas *d'assurances* mentionnés au chapitre VI, soit temporaires, soit pour la vie entière. Car si l'on représente par S la valeur actuelle de l'assurance d'une somme donnée, et par S' la valeur actuelle de l'assurance *temporaire* de la même somme; alors la prime équivalente payable pendant l'existence simultanée de toutes les têtes proposées sera, dans le premier cas,

$$p = \frac{S}{1 + (ABC)},$$

et dans le second cas,

$$p = \frac{(S)^t}{1 + (ABC)^{t-1}}.$$

Il est inutile d'observer que quand S désigne la

valeur d'une assurance payable *au dernier décès* des têtes données, ABC désigne aussi dans ce cas la valeur d'une annuité payable *jusqu'au dernier décès* de ces têtes, d'après ce qui a été dit au problème XXII, corollaire 2; et ainsi de suite pour toutes les natures d'assurances dont nous avons parlé.

Voyez, pour l'application de cette formule, les questions XXVI, XXVII et XXIX du chapitre XII.

370. Quant aux assurances qui font le sujet du chapitre VIII, la prime annuelle peut être de trois sortes, 1°. selon que cette prime est payable jusqu'à ce que le droit soit déterminé; 2°. ou jusqu'à ce que le capital assuré soit dû; 3°. ou selon que ce capital est dû au moment où le droit se trouve déterminé.

Ainsi dans le problème XXVII, la somme étant due en même temps que le droit se trouve déterminé on obtiendra la valeur de la prime annuelle en divisant la valeur de l'assurance par l'unité ajoutée à la valeur d'une annuité sur les deux têtes réunies A B; ce qui donne

$$p = \frac{S}{1 + AB}.$$

Dans le problème XXVIII, le droit est déterminé à la dissolution du groupe des têtes données, mais la somme n'est due qu'à l'extinction de la tête A. Donc la valeur de la prime annuelle payable jusqu'à ce que le droit soit déterminé sera

$$p = \frac{S}{1 + AB},$$

et la valeur de la prime annuelle payable jusqu'à ce que la somme soit due sera

$$p = \frac{S}{1 + A}.$$

Dans le problème XXIX, la somme est due au moment où le droit est déterminé, et par conséquent la prime annuelle est égale à la valeur de l'assurance divisée par l'unité ajoutée à la valeur d'une annuité sur les trois têtes réunies ABC; ce qui donne

$$p = \frac{S}{1 + ABC}.$$

Dans le problème XXX, le droit n'est déterminé et la somme n'est due qu'après la dissolution du groupe de têtes AB et du groupe de têtes AC. C'est-à-dire que la prime annuelle sera payable pendant l'existence simultanée des têtes A B, et aussi pendant l'existence simultanée des têtes A C, après le décès de B. Les deux valeurs seront trouvées égales à

$$AB + AC - ABC;$$

donc nous aurons dans ce cas

$$p = \frac{S}{1 + AB + AC - ABC}.$$

Dans le problème XXXI, la prime annuelle payable jusqu'à ce que le droit soit déterminé sera la même que dans le dernier problème; mais la valeur

de la prime payable jusqu'à ce que la somme soit due, est évidemment

$$p = \frac{S}{1 + A}.$$

Nous raisonnerons d'une manière semblable pour les problèmes suivans du chapitre VIII; mais j'en ai dit assez pour que le lecteur puisse déterminer aisément les primes annuelles des annuités et des assurances dans tous les autres cas qui peuvent se présenter. Je ne pousserai donc pas plus loin mes observations à ce sujet.

FIN DU TOME PREMIER.

